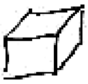
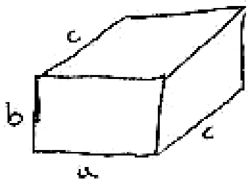
WYKŁAD 6. 23 MARCA 1998 R.

OBJĘTOŚĆ WIELOŚCIANÓW



jednostka objętości - sześcian jednostkowy

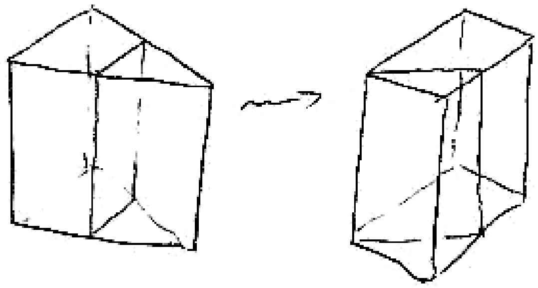


$V = a \cdot b \cdot c$ (bo kolejno rozciągamy [bądź ściskamy] poszczególne wymiary)

Przyjmując $S = a \cdot c$ oraz $h = b$ dostajemy $V = S \cdot h$.

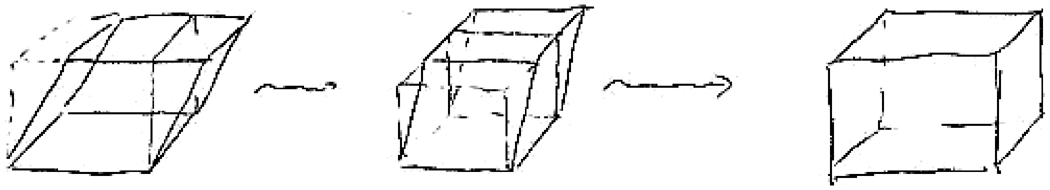
Dla jakich innych brył obowiązuje wzór $V = S \cdot h$?

(1) Dla graniastosłupów prostych



bo każdy z nich można rozłożyć na graniastosłupy proste z których da się ułożyć prostopadłościan o takim samym polu podstawy i takiej samej wysokości

(2) Dla równoległościanów



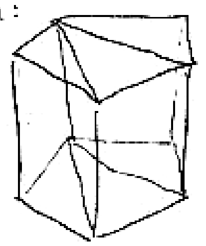
bo każdy z nich jest równoważny przez rozkład graniastosłupowi prostemu o takiej samej podstawie i wysokości (równoważność tę robi się podobnie jak dla równoległoboków, kolejno w dwóch kierunkach)

(3) Dla dowolnych graniastosłupów (a więc i dla pochyłych):

Def. Graniastosłup to wielościan, którego wszystkie wierzchołki należą do dwóch równoległych ścian zwanych podstawami, zaś wszystkie krawędzie nie należące do podstaw są równoległe. Podstawy graniastosłupa są wielokątami przystającymi, zaś wszystkie pozostałe ściany są równoległobokami.

KROK 1. Wystarczy wykazać wzór dla graniastosłupów trójkątnych.

d-d:



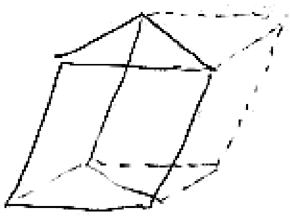
Każdy inny graniastosłup można rozłożyć na trójkątne o podstawach $S_1, \dots, S_n$, gdzie $S_1 + \dots + S_n = S$, i o wspólnej wysokości h.

Jeżeli $V_i = S_i \cdot h$, to

$$V = \sum V_i = \sum S_i h = h \cdot \sum S_i = h \cdot S. \quad \square$$

[rysunek powinien być bardziej podzielony.]

KROK 2. Wzór jest ok. dla graniastosłupów trójkątnych.



d-d: Każdy graniastosłup trójkątny jest połową równoległościanu składającego się z dwóch ~~takich~~ przystających graniastosłupów trójkątnych. (Ich przystawanie zadane jest przez symetrię środkową względem środka wspólnej równoległobocznej ściany).

Jeśli S i h to podstawa i wysokość graniastosłupa trójkątnego, to równoległościan ma podstawę $2S$ i wysokość h. Wówczas obliczamy objętość V graniastosłupa

$$V = \frac{1}{2}(2S) \cdot h = S \cdot h. \quad \square$$

PROBLEM: Dlaczego wzór na objętość ostrosłupa ma postać $V = \frac{1}{3} S \cdot h$?

UWAGA: Wystarczy wzór ten uzasadnić dla ostrosłupów trójkątnych, czyli dla czworościanów.

UZASADNIENIE I:

Opieramy je na następującym fakcie:

FAKT I: Stosunek objętości brył podobnych jest równy trzeciej potędze ich skali podobieństwa,

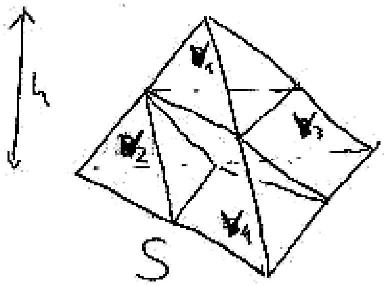
dowód dla graniastosłupów: | k-krotne rozciąganie (lub ściskanie) kolejno w trzech kierunkach w przestrzeni

Przyjmijmy że podstawy i wysokości graniastosłupów to S, h i S', h', zaś skala podobieństwa to k. Wówczas

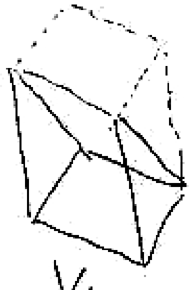
$$S' = k^2 \cdot S, \quad h' = k \cdot h \implies V' = S' \cdot h' = k^2 S \cdot k \cdot h = k^3 \cdot Sh = k^3 \cdot V.$$

Tę obserwację przenosimy na wszystkie bryły (bez ścisłego uzasadnienia). $\square$

~~Uzasadnienie~~



Rozkładamy czworościan V na cztery bryły.
V_1 i V_2 są podobnymi czworościanami w skali $\frac{1}{2}$,
więc $V_1 = V_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V = \frac{1}{8} \cdot V$.
V_3 jest graniastosłupem o postawie $S/4$ i wysokości $h/2$,
więc $V_3 = S/4 \cdot h/2 = \frac{1}{8} S \cdot h$.


V_4

V_4 jest graniastosłupem położonym na ściance bocznej. Ta ściana boczna ma pole $P = S/2$, zaś wysokość bryły względem niej wynosi $H = h/2$.
Rysunek obok uzasadnia że $V_4 = \frac{1}{2} P \cdot H = \frac{1}{2} \cdot S/2 \cdot h/2 = \frac{1}{8} S \cdot h$.

Ostatecznie więc mamy
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{8}V + \frac{1}{8}V + \frac{1}{8}S\cdot h + \frac{1}{8}S\cdot h = \frac{1}{4}V + \frac{1}{4}S\cdot h$$
Stąd $\frac{3}{4}V = \frac{1}{4}S\cdot h$ czyli $V = \frac{1}{3}S\cdot h$. $\square$

UZASADNIENIE II:

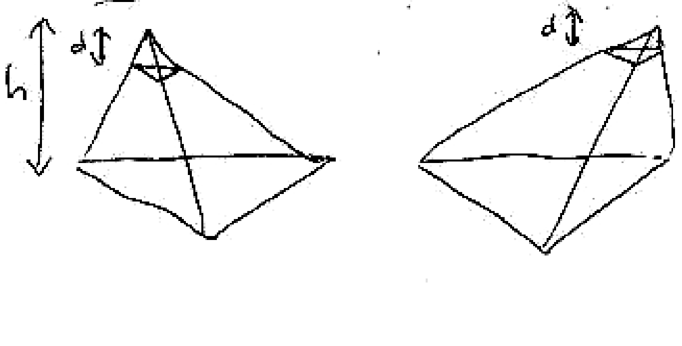
Oprzemy je na następującym FAKCIE, który uzasadnimy intuicyjnie:

FAKT II: Czworościany o przystających podstawach i równych wysokościach mają równe objętości.

Intuicyjne uzasadnienie FAKTU oprzemy na następującej ścisłej obserwacji:

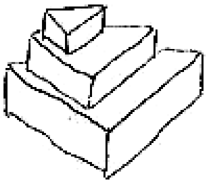
OBSERWACJA: Przekroje poziome czworościanów z FAKTU II poprowadzone na jednakowych wysokościach są do siebie przystające.

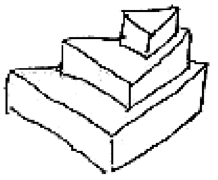
dowód obserwacji:



Wystarczy zauważyć, że przekrój na wysokości d od wierzchołka jest trójkątem podobnym do podstawy w skali $k = \frac{d}{h}$. $\square$

Intuicyjne UZASADNIENIE FAKTU II :

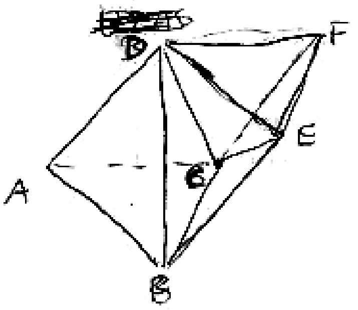




Wyobraźmy sobie oba czworościany jako piramidy o bardzo drobnych schodkach. Wówczas na podstawie obserwacji graniastosłupy tworzące poszczególne warstwy piramid są w obu piramidach jednakowe. Stąd równość objętości piramid, a więc i czworościanów.

(Ten argument jest nieścisły, ale ma dużą wartość poglądową). □

WNIOSEK. Ostrosłup o podstawie równoległobocznej dzieli się na 2 ostrosłupy trójkątne o przystających podstawach i wspólnym wierzchołku. Te ostrosłupy mają jednakowe objętości.



Czworościan ABCD uzupełniamy do graniastosłupa trójkątnego o tej samej podstawie i takiej samej wysokości, dla którego AD jest krawędzią boczną. Rozkłada on się na trzy czworościany: ABCD, BCDE, CDEF.

Na podstawie WNIOSKU Z FAKTU II te trzy czworościany mają równe objętości. Jest tak dlatego, że każde kolejne dwa z nich przy odpowiednim doborze mają podstawy zawarte we wspólnej płaszczyźnie zaś przeciwległe do tych podstaw wierzchołki wspólne, a więc równe wysokości. Leżące w tej samej płaszczyźnie podstawy są przystające, gdyż są to trójkąty powstałe z podziału równoległoboku przekątną. □

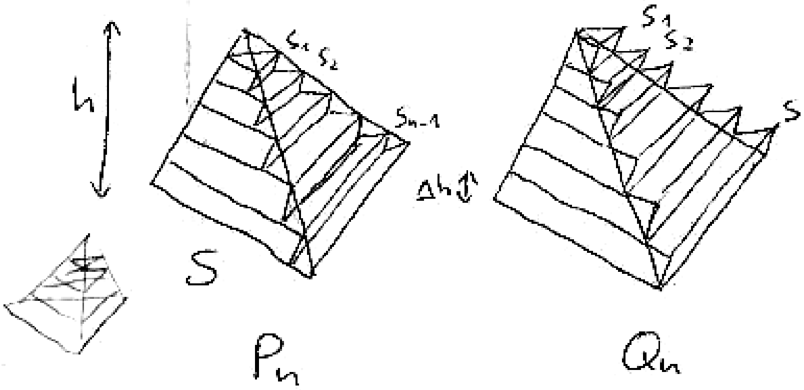
Stąd wynika, że objętość czworościanu to $\frac{1}{3}$ objętości graniastosłupa, czyli $V = \frac{1}{3} S \cdot h$. □

UZASADNIENIE III :

Opiera się ono na tożsamości algebraicznej

$$(*) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

(Łatwej do uzasadnienia np. indukcyjnie), zaś całe uzasadnienie jest autorstwa Archimedesa. Odtworzymy to uzasadnienie w języku współczesnym, posługując się współczesną teorią granic.



Uzasadnienie Archimedesa polega na wpisywaniu i opisywaniu na czworościanie piramid ~~[illegible]~~ P_n i Q_n składających się z graniastosłupów trójkątnych.

Ponieważ $P_n < V < Q_n$, dostajemy więc przybliżenie objętości V czworościanu od dołu i od góry.

Przybliżenia od góry potrzebne są do tego, by wykazać że przybliżenia od dołu, przy $n \to \infty$, wyczerpią V.

Ponieważ ~~[illegible]~~ mamy $V - P_n < Q_n - P_n$, więc niedomiar przybliżenia przez P_n nie przekracza $Q_n - P_n$.

Ale różnica $Q_n - P_n$ jest równa objętości dolnego graniastosłupa w Q_n, czyli

$$Q_n - P_n = S \cdot \Delta h = S \cdot h/n = \cancel{\frac{Sh}{n}}\ \frac{S \cdot h}{n}.$$

Tak więc $\lim\limits_{n \to \infty} (Q_n - P_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{S \cdot h}{n} = 0$, skąd również

$$\lim_{n \to \infty} (V - P_n) = 0,$$

a więc piramidy P_n wyczerpują ~~ostrosłup~~ czworościan V.

Z tej racji możemy twierdzić że $V = \lim\limits_{n \to \infty} P_n$.

Teraz obliczymy P_n.

~~Jeśli S jest polem podstawy, zaś~~ Oznaczmy przez S i h pole podstawy i wysokość czworościanu. Przez $\Delta h = h/n$ wysokości schodków w piramidzie P_n, zaś przez S_i pola podstaw graniastosłupów tworzących poszczególne schodki.

VERTE

Kluczowa OBSERWACJA:

Podstawa S_i jest podobna do podstawy S w skali $\frac{i}{n}$, ponieważ jest ona przekrojem ostrosłupa na wysokości $i \cdot \Delta h$ od górnego wierzchołka, zaś cała wysokość ostrosłupa wynosi $n \cdot \Delta h$.

W takim razie dla pól zachodzi związek

$$S_i = \frac{i^2}{n^2} \cdot S .$$

Obliczamy:

$$P_n = S_1 \cdot \Delta h + S_2 \cdot \Delta h + \dots + S_{n-1} \cdot \Delta h =$$

$$= \frac{1^2}{n^2} \cdot S \cdot \frac{1}{n} h + \frac{2^2}{n^2} \cdot S \cdot \frac{1}{n} h + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot S \cdot \frac{1}{n} h =$$

$$= S \cdot h \, \frac{1}{n^3} \left(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 \right) =$$

$$= S \cdot h \, \frac{\frac{1}{3}(n-1)^3 + \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{6}(n-1)}{n^3} .$$

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \cancel{S \cdot h \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{3}(n-1)}{n^3}}$$

$$= S \cdot h \left[\frac{1}{3} \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)^3}{n^3}}_{=1} + \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)^2}{n^3}}_{=0} + \frac{1}{6} \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n^3}}_{=0} \right]$$

$$= \frac{1}{3} S \cdot h . \quad \square$$

UWAGA: Ostatni sposób obliczenia objętości z powodzeniem można też zastosować do stożka kołowego.

UWAGA: omówić walec – skrótowo a dopiero potem UWAGA o stożkach i walcowych schodkach