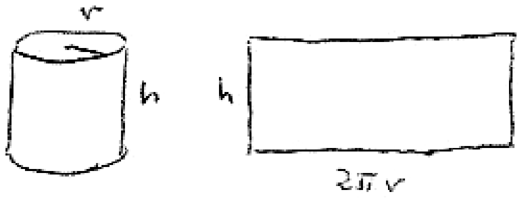
POLE POWIERZCHNI SFERY I JEJ ODCINKÓW

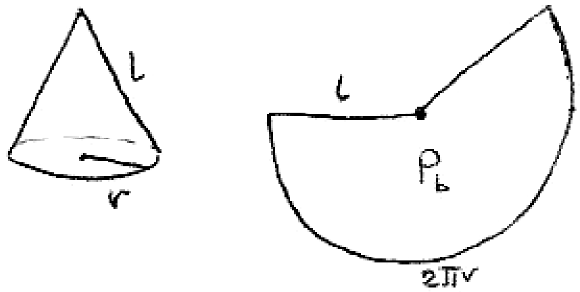
(3)

STOŻKI, STOŻKI ŚCIĘTE, PIERŚCIENIE STOŻKOWE

Powierzchnie zakrzywione rozwijalne na płaszczyznę:

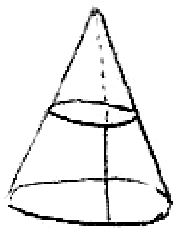


$$P_b = 2\pi r h$$



$$\frac{P_b}{\pi l^2} = \frac{2\pi r}{2\pi l} = \frac{r}{l}$$

$$P_b = \pi l^2 \cdot \frac{r}{l} = \pi \cdot r \cdot l$$



Stożek ścięty

pierścień stożkowy – powierzchnia boczna stożka ściętego

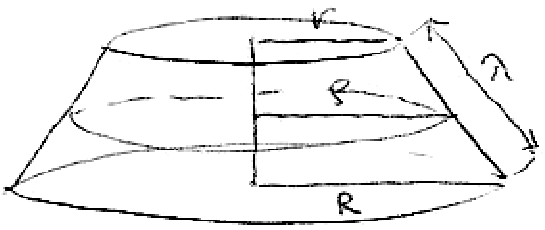
tworząca – fragment tworzącej pierwotnego stożka (przed ścięciem) – pobocznica

szerokość pierścienia stożkowego – odległość pomiędzy jego kołowymi krawędziami

λ – długość obciętej tworzącej

rdzeń pierścienia stożkowego – okrąg zawarty w pierścieniu położony w połowie odległości od brzegów

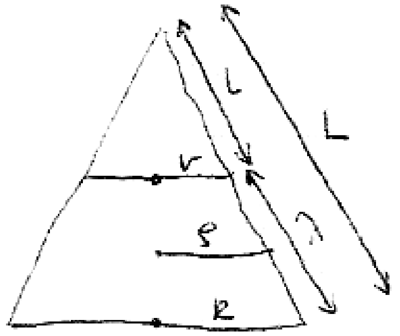
$2\pi\varrho$ – brzeg kołowego przekroju poprowadzonego w połowie wysokości pomiędzy podstawą dolną i górną stożka ściętego



TWIERDZENIE: Pole dowolnego pierścienia stożkowego jest równe iloczynowi długości jego rdzenia i jego szerokości:

$$P = 2\pi\varrho\lambda$$

WNIOSEK: Ponieważ $\varrho = \frac{R+r}{2}$, inny wzór jest taki: $P = \pi(R+r)\lambda$



$\varrho = \frac{r+R}{2}$ $\quad \lambda = L - l$

$P = \pi R L - \pi r l$

$$2\pi\varrho\lambda = 2\pi \frac{R+r}{2}(L-l) = \pi(R+r)(L-l) =$$

$$= \pi RL - \underline{\pi R l} + \underline{\pi r L} - \pi r l = \pi RL - \pi r l$$

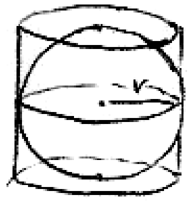
Ale $\frac{r}{R} = \frac{l}{L}$ czyli $R \cdot l = r \cdot L$

Zatem $P = 2\pi\varrho\lambda$. □

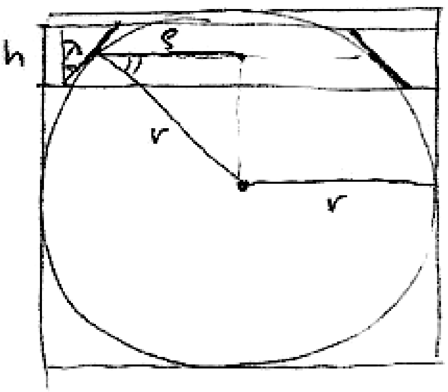
VERTE →
ZASTOSOWANIA

POLE SFERY JAKO GRANICA PÓL POWIERZCHNI KAWAŁKAMI STOŻKOWYCH.

TWIERDZENIE: Pole sfery jest równe polu powierzchni bocznej walca opisanego na tej sferze:



$P = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$.



POMOCNICZY

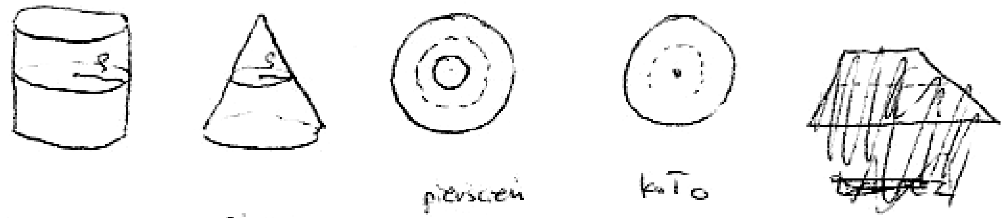
LEMAT: pierścień stożkowy styczny do sfery wzdłuż równika ma pole równe części powierzchni bocznej walca opisanego na tej sferze zawartej pomiędzy płaszczyznami krawędzi tego pierścienia.

dowód: $\frac{\varrho}{r} = \frac{h}{\lambda}$ z podobieństwa trójkątów czyli $\varrho\lambda = rh$

P_1 - pole pierścienia, P_2 - pole części walca

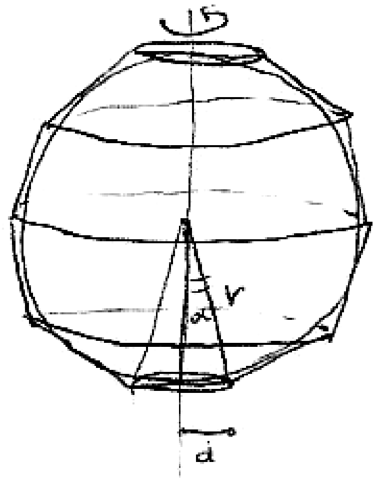
$P_1 = 2\pi\varrho\lambda = 2\pi r h = P_2$. □

TEN SAM WZOR OBEJMUJE TAKIE PRZYPADKI JAK



walec stożek pierścień kołowy koło

Dowód twierdzenia



2n-kąt foremny opisany na kole o promieniu r, obrócony wokół osi przez środki pary przeciwległych boków tworzy powierzchnię obrotową kawałkami stożkową opisaną na sferze o promieniu r

P_{2n} – pole pow. całk. tej powierzchni

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}$$

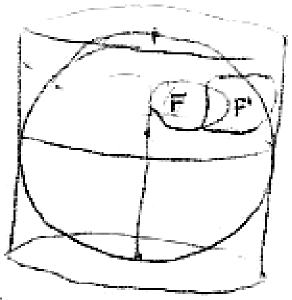
$$d = r \cdot tg\, \alpha = r \cdot tg \frac{\pi}{2n}$$

$$P_{2n} = P_b(\text{walca}) + 2P(\text{podstawy}) = 4\pi r^2 + 2 \cdot \pi \left(r \cdot tg \frac{\pi}{2n}\right)^2$$

Ale $\lim_{n\to\infty} tg \frac{\pi}{2n} = 0$, więc

$$P = \lim_{n\to\infty} P_{2n} = 4\pi r^2 + 2 \lim_{n\to\infty} \pi \left(r \cdot tg \frac{\pi}{2n}\right)^2 = 4\pi r^2. \quad \square$$

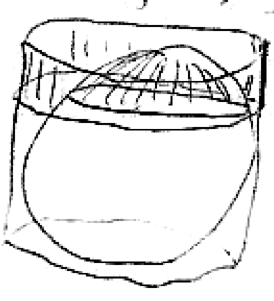
UWAGI:

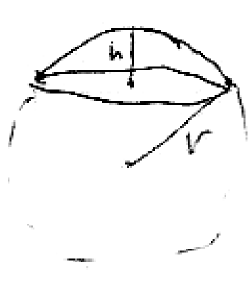


1. Odwzorowanie sfery (bez biegunów) na powierzchnię boczną walca, polegające na rzutowaniu po poziomych promieniach biegnących od osi obrotowej symetrii zachowuje pola figur.

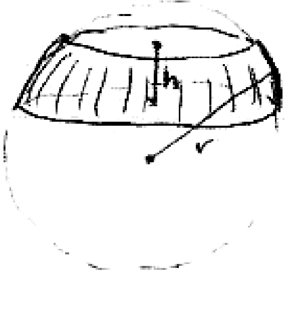
2. Korzystając z powyższej informacji (lub powtarzając argument przybliżania stożkami) można się przekonać że:

Pole wycinka sfery zawartego pomiędzy dwoma poziomymi płaszczyznami jest równe części powierzchni bocznej walca opisanego na tej sferze zawartej między tymi samymi płaszczyznami





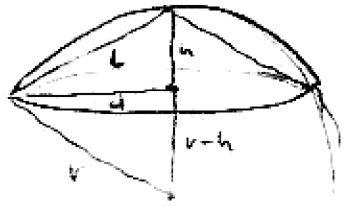
$P = 2\pi r h$



$P = 2\pi r h$

VERTE

3. ARCHIMEDES:



Pole czaszy sfery jest równe polu koła o promieniu równym tworzącej stożka wpisanego w tę czaszę.

dowód: $d^2 + (r-h)^2 = r^2$

$d^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$

$l^2 = d^2 + h^2 = 2rh$

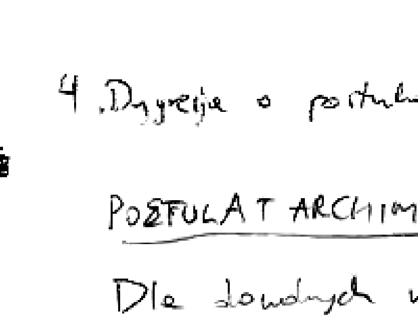
$P_{cz} = 2\pi rh \qquad P_K = \pi l^2 = \pi \cdot 2rh = 2\pi rh = P_{cz}. \ \square$

4. Dygresja o postulatach Archimedesa i ścisłości jego metod.

<u>POSTULAT ARCHIMEDESA</u> (używany jako aksjomat):

Dla dowolnych wypukłych brył $B_1 \subset B_2$ ich pola powierzchni spełniają nierówność $P_{pow}(B_1) \leq P_{pow}(B_2)$.

Ten postulat pozwolił Archimedesowi precyzyjnie uzasadnić, że pole powierzchni sfery rzeczywiście jest granicą pól opisanych na sferze powierzchni kawałkami stożkowych.



$\alpha = \pi/2n$

Skala podobieństwa

$k = \cos(\pi/2n)$

$B^w_{2n} \subset K \subset B^z_{2n}$

$P_{pow}(B^w_{2n}) \leq P_{pow}(K) \leq P_{pow}(B^z_{2n})$

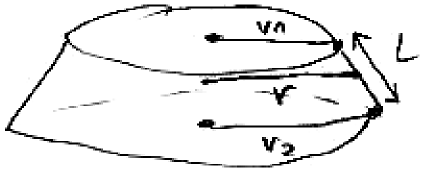
$P_{pow}(B^w_{2n}) = k^2 \cdot P_{pow}(B^z_{2n}) = \cos^2(\pi/2n) \cdot \left[4\pi r^2 + 2\pi r^2 (tg \frac{\pi}{2n})^2\right] \to 4\pi r^2$

$P_{pow}(B^z_{2n}) = 4\pi r^2 + 2\pi (r\, tg \frac{\pi}{2n})^2 \to 4\pi r^2$

FIGURY OBROTOWE KAWAŁKAMI STOŻKOWE

 [redacted]

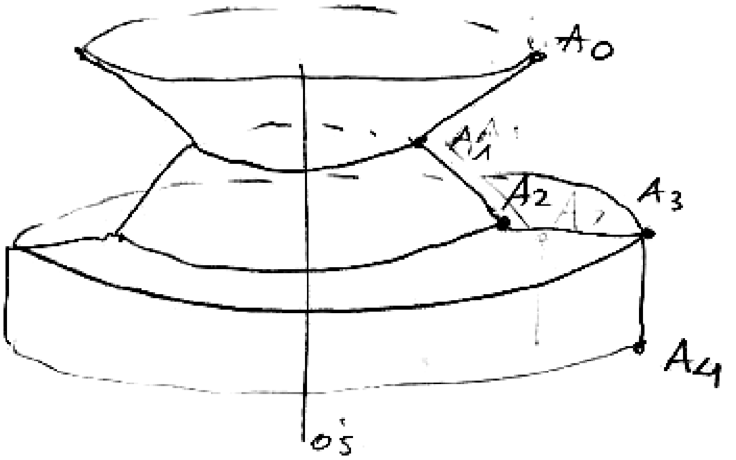
pierścień stożkowy



L - tworząca

$r = \frac{v_1 + v_2}{2}$

$$P = 2\pi r L$$



Łamana $A_0 A_1 \ldots A_n$
(złożona z n odcinków $A_{i-1} A_i$)

S_i - środek $A_{i-1} A_i$

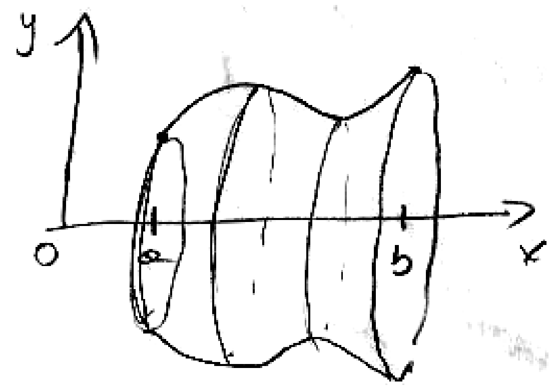
v_i - odległość S_i od osi obrotu

$d_i = |A_{i-1} A_i|$ - długość $A_{i-1} A_i$

$$P = 2\pi (v_1 d_1 + \ldots + v_n d_n)$$

OBRACANIE WYKRESU (RÓŻNICZKOWALNEJ) FUNKCJI F

$f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ funkcje nieujemne



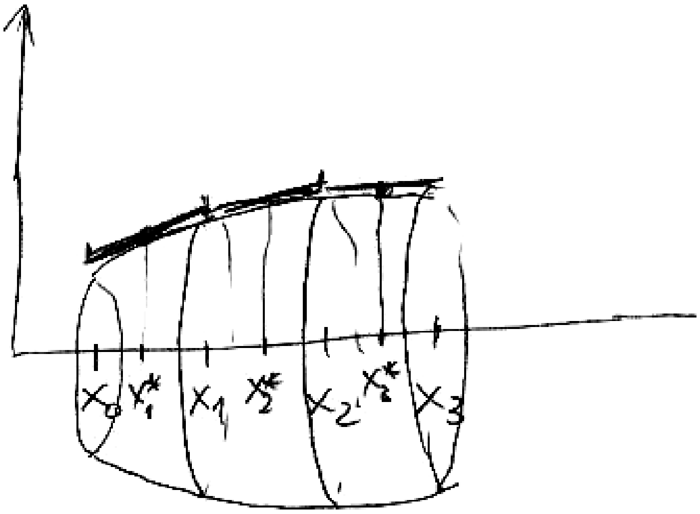
Wykres obracamy wokół osi Ox

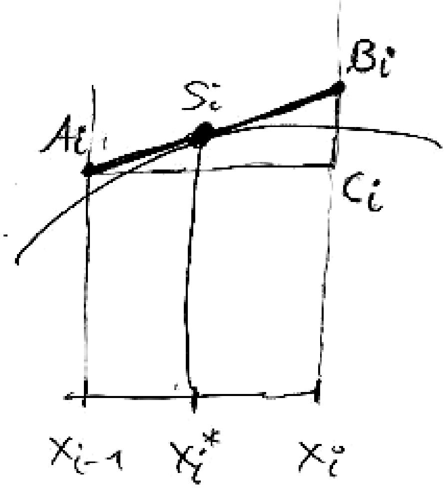
otrzymując pow. obrotową Σ_f

...

WZÓR CAŁKOWY NA POLE TAK OTRZYMANEJ POWIERZCHNI -
- INTUICYJNE WYPROWADZENIE

Σ_f przybliżamy sumą pierścieni stożkowych stycznych :





stąd $|A_iB_i| = \sqrt{\Delta x_i^2 \left(1+f'(x_i^*)^2\right)} = \Delta x_i \cdot \sqrt{1+f'(x_i^*)^2}$

$|A_iB_i| = \sqrt{|A_iC_i|^2 + |C_iB_i|^2}$, $|A_iC_i| = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $|B_iC_i| = \Delta x_i \cdot |f'(x_i^*)|$

Przedział $[a,b]$ dzielimy na małe przedziały ~~...~~ $[x_{i-1}, x_i]$

$$x_i^* = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} \text{ – środek przedziału } [x_{i-1}, x_i]$$

odcinek A_iB_i – jak na rysunku – styczny do wykresu f w punkcie $(x_i^*, f(x_i^*)) = S_i$

S_i – środek A_iB_i

P_i – pole powierzchni powstałej z obrócenia A_iB_i wokół OX

$r_i = f(x_i^*)$ – promień rdzenia ; $d_i = |A_iB_i|$ – szerokość pierścienia – wyliczamy z Pitagorasa

$$P_i = 2\pi f(x_i^*) \cdot |A_iB_i| = 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1+f'(x_i^*)^2} \cdot \underbrace{|x_i - x_{i-1}|}_{=\Delta x_i}$$

$$= 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1+f'(x_i^*)^2}\, \Delta x_i$$

$$P_1 + \dots + P_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \sqrt{1+f'(x_i^*)^2} \cdot \Delta x_i$$

Gdy $n \to \infty$, $P_1 + \dots + P_n$ coraz lepiej przybliża pole pow Σ_f, natomiast wyrażenie po prawej stronie w granicy daje całkę Riemanna $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Zatem

$$P(\Sigma_f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$