1

WYKŁAD 1 - POLE FIGUR WIELOKĄTNYCH I RÓWNOWAŻNOŚĆ PRZEZ ROZKŁAD

DEF. Figura wielokątna to taka figura płaska, które daje się przedstawić jako suma skończonej rodziny parami niezachodzących na siebie trójkątów

[niezachodzące = nie mają wspólnych punktów wewnętrznych
= ich wnętrza są rozłączne
= mogą zahaczać o siebie conajwyżej częściami brzegów]

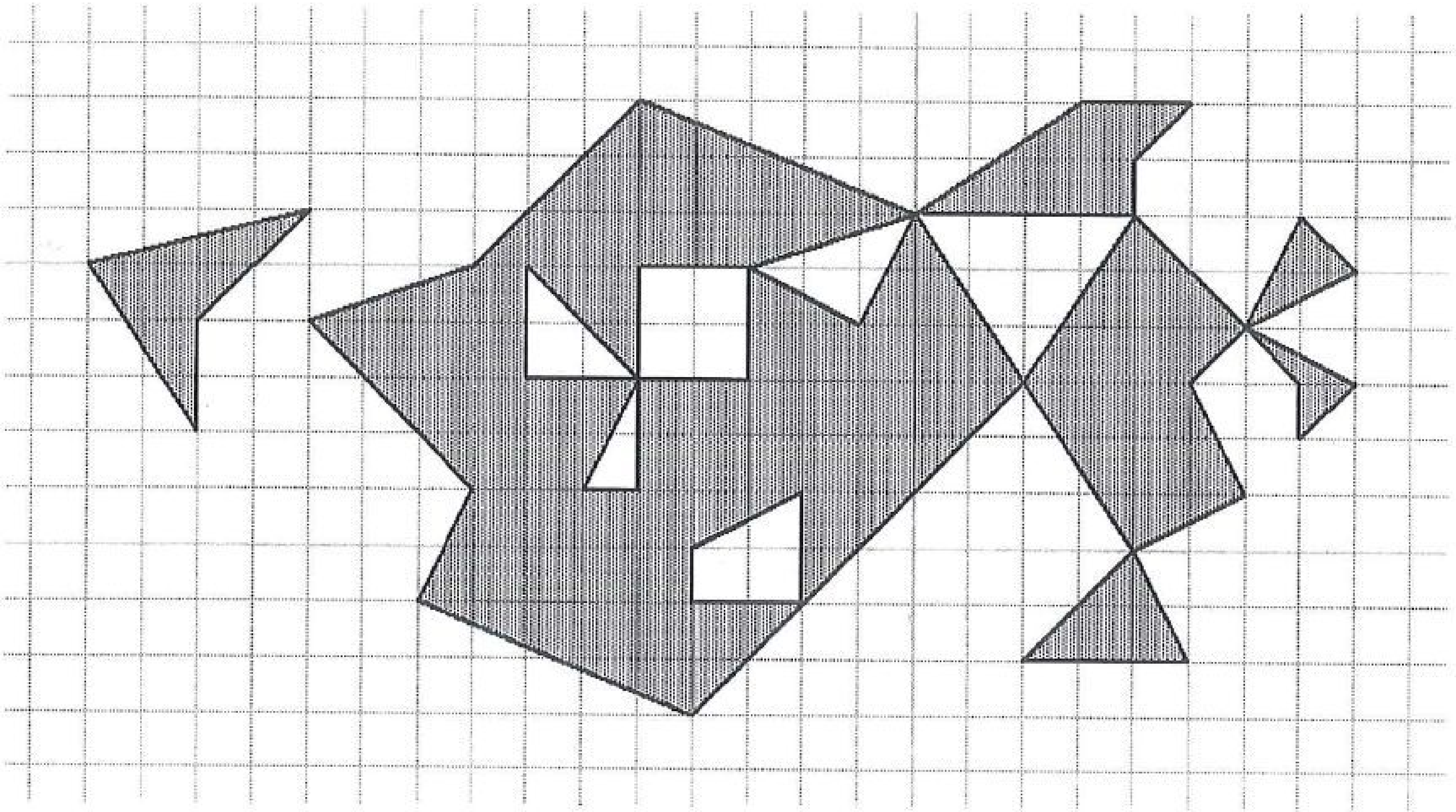
PRZYKŁAD. Każdy zwykły wielokąt jest figurą wielokątną, ale ogólnie jest to rodzina znacznie szersza niż zwykłe wielokąty.

Pole figury wielokątej W

- rozkład W na trójkąty $T_1, T_2, \ldots, T_m$ (parami niezachodzące na siebie)
- wybór podstaw a_i oraz wysokości h_i w trójkątach T_i
- $$P(W) := \sum_{i=1}^{m} (a_i h_i/2)$$

UWAGI. * wielkość $a_i \cdot h_i/2$ nie zależy od wyboru podstawy a_i w trójkącie T_i (ŁATWE)

* cała suma $\Sigma(a_i \cdot h_i/2)$ nie zależy od sposobu rozkładu figury W na trójkąty (TRUDNE).



Z powyższego określenia pola

można wyprowadzić wszelakie wzory na pole wielokątów

(ĆWICZENIA!)

My, na wykładzie, wyprowadzimy inny wniosek.

FAKT. Jeśli figura wielokątna W' jest podobna do figury W ze skalą podobieństwa k, to

$$P(W') = k^2 \cdot P(W).$$

Dowód:

1°. Najpierw udowodnimy, że jest to prawda gdy W i W' są trójkątami.

Niech a - podstawa trójkąta W

h - wysokość opuszczona na bok a

i niech a' - podstawa trójkąta W' odpowiadająca podstawie a przez podobieństwo

h' - wysokość opuszczona na a'.

Z podobieństwa (w skali k) mamy:

$a' = k \cdot a$, $h' = k \cdot h$.

Stąd:

$$P(W') = a' \cdot h'/2 = ka \cdot kh/2 = k^2\, a \cdot h/2 =$$
$$= k^2 \cdot P(W). \square$$

2°. Teraz, korzystając z 1°, udowodnimy wzór $P(W') = k^2 \cdot P(W)$ w pełnej ogólności.

Wybierzmy rozkład figury W na trójkąty $T_1, \dots, T_m$ oraz odpowiadający mu dzięki podobieństwu rozkład W' na trójkąty $T_1', \dots, T_m'$.

Wtedy każdy trójkąt T_i' jest podobny do T_i w skali k (tej samej).

Dzięki przypadkowi 1°, dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$ zachodzi

$$P(T_i') = k^2 \cdot P(T_i).$$

Zatem

$$P(W') = \sum_{i=1}^{m} P(T_i') = \sum_{i=1}^{m} k^2 \cdot P(T_i) =$$

$$= k^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} P(T_i) = k^2 \cdot P(W). \quad \square$$

RÓWNOWAŻNOŚĆ PRZEZ ROZKŁAD

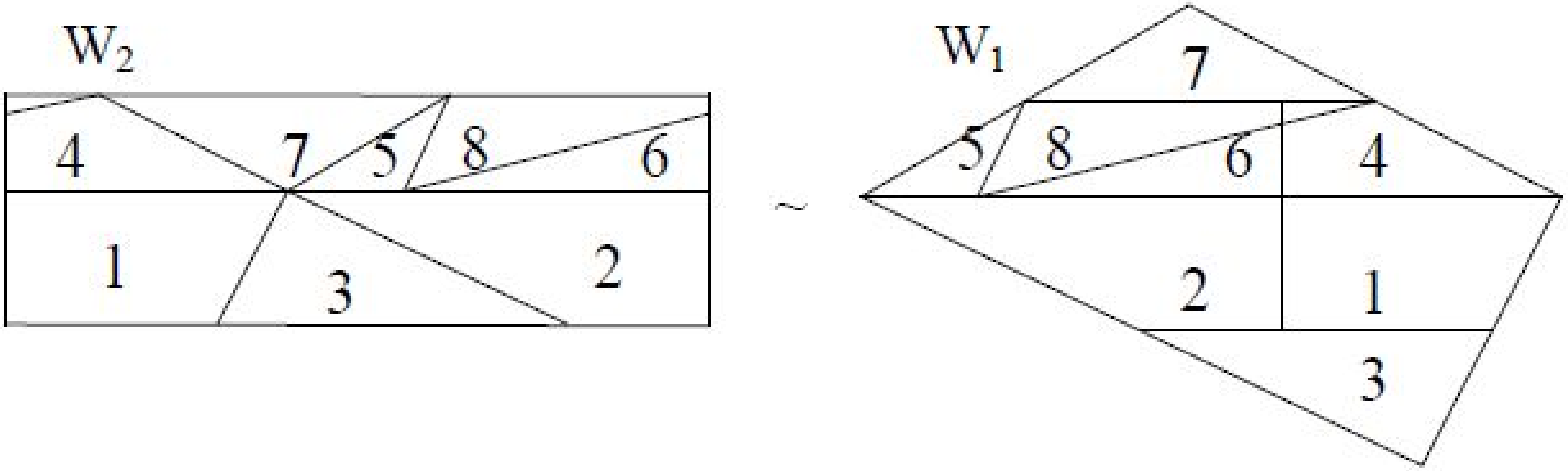
W starożytnej Grecji matematycy nie posługiwali się pojęciem pola. Porównywali rozmiar figur rozkładając je na części i próbując zmieścić te części w drugiej figurze. Stąd wzięło się pojęcie równoważności przez rozkład.

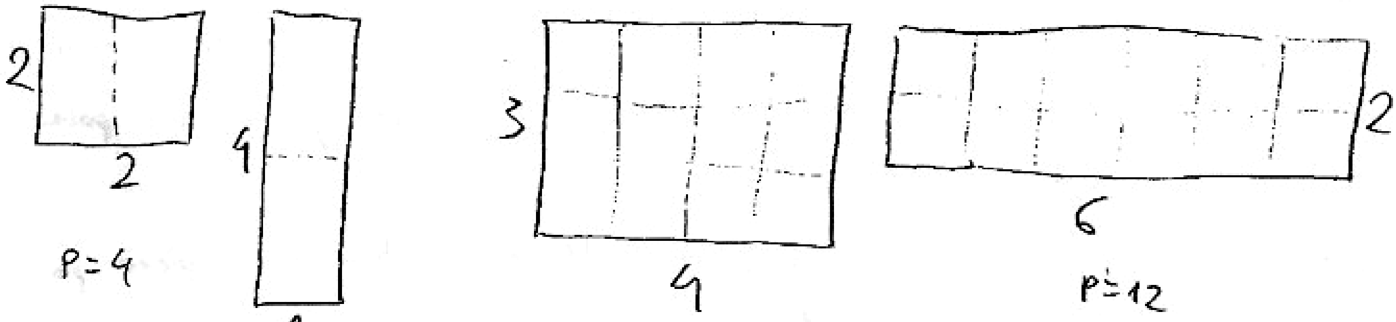
DEFINICJA. Figury W_1 i W_2 są równoważne przez rozkład jeśli jedną z nich można rozłożyć na skończenie wiele części, z których da się złożyć drugą figurę.

UWAGA. O figurach równoważnych przez rozkład starożytni Grecy mówili, że mają ten sam rozmiar.

Nietrudno przekonać się, że dwie figury wielokątne równoważne przez rozkład muszą mieć równe pola.

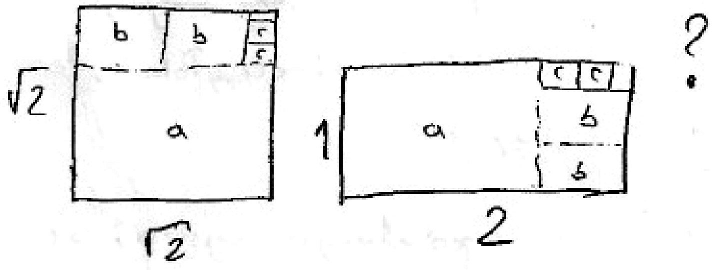
PROBLEM. Czy dowolne dwie figury wielokątne mające to samo pole są równoważne przez rozkład?

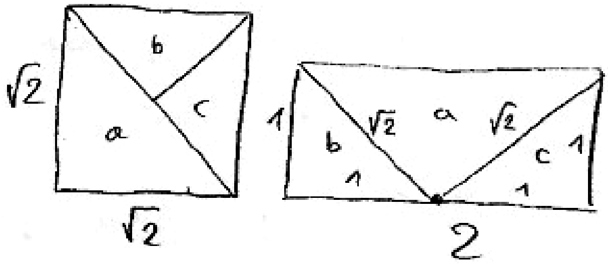

W2
4
7
5
8
6
1
3
2
~
W1
7
5
8
6
4
2
1
3



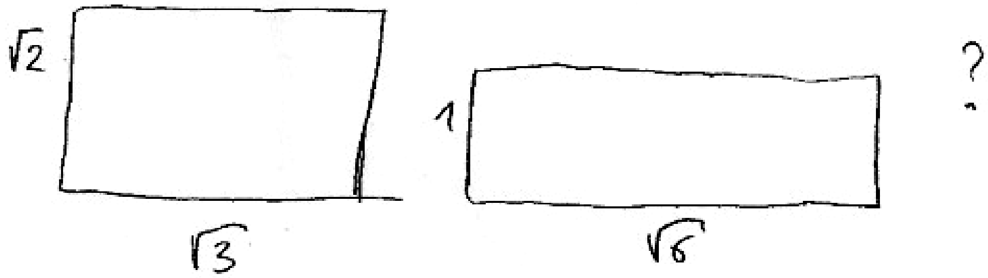
P=4 P=4 P=12 P=12

Czy tak zawsze można?

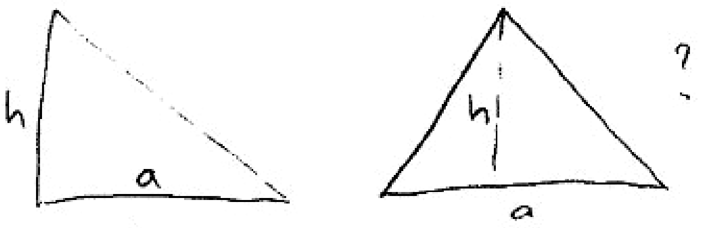




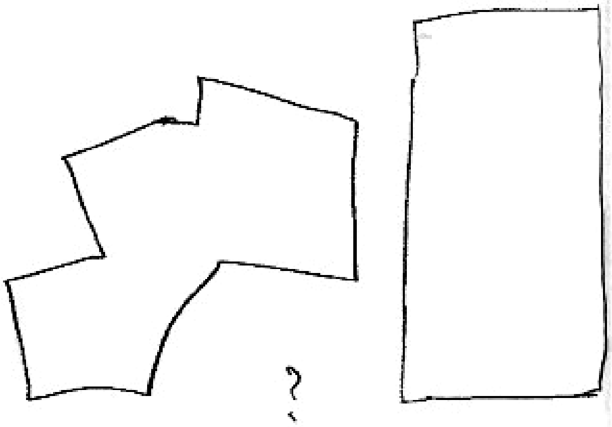
P = 2 P = 2



$P = \sqrt{6}$ $P = \sqrt{6}$



$P = \underline{a \cdot h}$ $P = \underline{a \cdot h}$



P P

Matematycy w Starożytnej Grecji
(tacy jak Euklides, Pitagoras, i inni)
zauważyli następujące dwie rzeczy:

(1) równoważność przez rozkład można realizować w kilku krokach (zamiast w jednym);
innymi słowy, stosując oznaczenie $W_1 \overset{R}{\equiv} W_2$ dla figur równoważnych przez rozkład, mamy

$$W_1 \overset{R}{\equiv} W_2 \text{ i } W_2 \overset{R}{\equiv} W_3 \Longrightarrow W_1 \overset{R}{\equiv} W_3 \quad \text{(przechodniość!)}$$

(2) pytanie o równoważność przez rozkład dwóch figur można sprowadzić do pytania o ich równoważność przez rozkład z tym samym kwadratem K
(bo jeśli $W_1 \overset{R}{\equiv} K$ i $W_2 \overset{R}{\equiv} K$, to z przechodniości $W_1 \overset{R}{\equiv} W_2$).

TERMINOLOGIA.
<u>Kwadratura</u> figury W to jej równoważność przez rozkład z pewnym kwadratem

DWA TWIERDZENIA STAROŻYTNYCH GREKÓW
(1) [Euklides, 2200 lat temu] Wykonalna jest kwadratura dowolnego prostokąta.

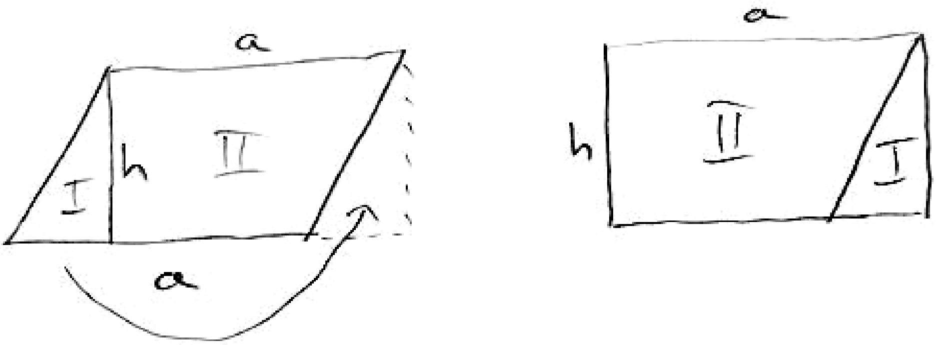
(2) [Pitagoras, 2500 lat temu] Wykonalna jest kwadratura figury będącej sumą dowolnych dwóch kwadratów.

Dowody obu twierdzeń, Euklidesa i Pitagorasa, opierają się na następującym lemacie:

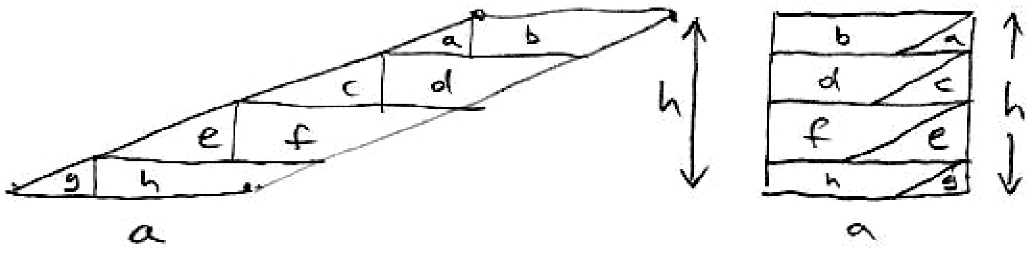
LEMAT. Dowolny równoległobok o podstawie a i wysokości h jest równoważny przez rozkład z prostokątem o wymiarach $a \times h$.

SZKIC DOWODU:

Jeśli równoległobok jest „lekko pochylony", to uzasadnienie jest proste:

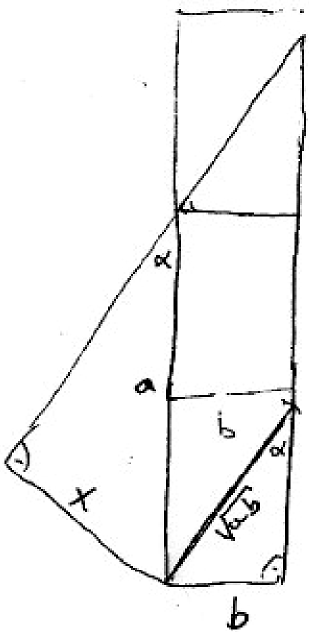


Jeśli równoległobok jest „mocno pochylony", uzasadnienie jest trudniejsze, i wymaga np podziału na „niskie" równoległoboki, które są „mało pochylone":



EUKLIDES.

Prostokąt o bokach a, b zajmuje tyle samo miejsca co kwadrat o boku $\sqrt{ab}$.



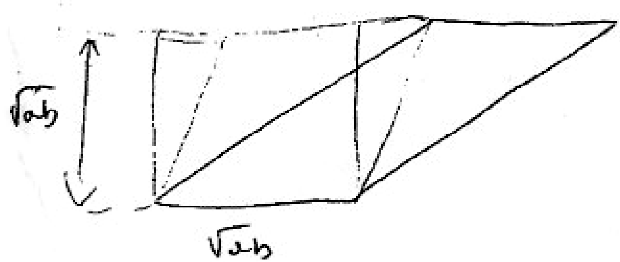
Jeśli $a > b$ to

$$a > \sqrt{ab} > b$$

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{\sqrt{ab}}$$

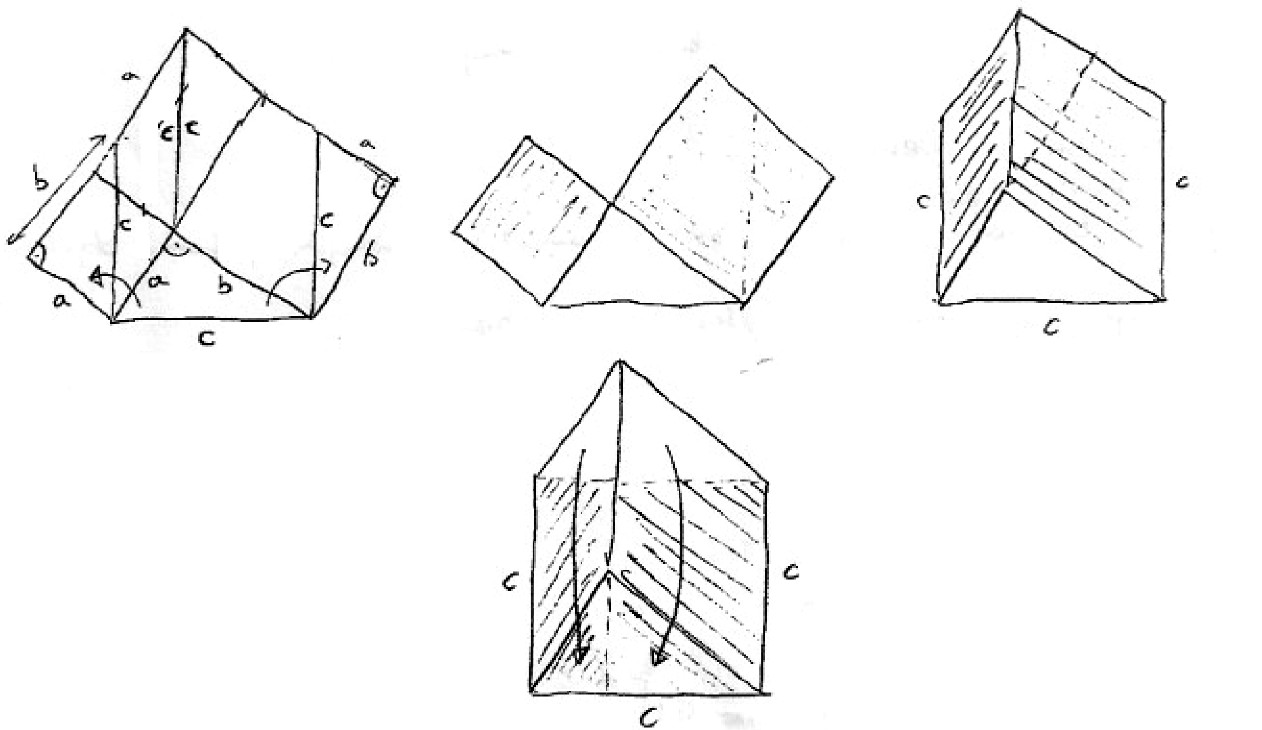
$$x = \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

prostokąt $a \times b$ ⇝ równoległobok o podstawie $\sqrt{ab}$ i wysokości $\sqrt{ab}$ ⇝ kwadrat $\sqrt{ab} \times \sqrt{ab}$



PITAGORAS.

Dwa kwadraty zbudowane na przyprostokątnych danego trójkąta prostokątnego zajmują razem tyle samo miejsca co kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej.



WNIOSEK: wykonalne jest

KWADRATURA DOWOLNEJ FIGURY WIELOKĄTNEJ.

Opis równoważności przez rozkład dowolnej figury wielokątnej W z kwadratem (wykonywanej w wielu krokach):

- fig. wielokątna $W \xrightarrow{\text{rozcinamy}}$ trójkąty
- każdy trójkąt pocięty $\xrightarrow{\text{ŁATWE}}$ prostokąt $\xrightarrow{\text{EUKLIDES}}$ kwadrat

  – dostajemy kolekcję kwadratów
- dwa kwadraty $\xrightarrow{\text{PITAGORAS}}$ większy kwadrat

  – dostajemy o jeden kwadrat mniej
- powtarzamy poprzedni krok, aż dostaniemy jeden kwadrat.

TWIERDZENIE (Farkas Bolyai, 1832)
Dowolne dwie figury wielokątne W_1, W_2 o równych polach są równoważne przez rozkład.

Dowód: $W_1 \overset{R}{\equiv} K_1$ - kwadrat, $W_2 \overset{R}{\equiv} K_2$ - kwadrat

$P(K_1) = P(W_1) = P(W_2) = P(K_2)$

więc kwadraty K_1 i K_2 są jednakowe.

Skoro więc $W_1 \overset{R}{\equiv} K_1 = K_2 \overset{R}{\equiv} W_2$, to z przechodniości,

$W_1 \overset{R}{\equiv} W_2$. $\square$

8 sierpnia 1900 r. II Międzynarodowy Kongres Matematyczny w Paryżu

David Hilbert „Problemy matematyczne" –

– lista 23 ważnych problemów matematycznych

jako wyzwanie dla XX wieku.

(tzw. problemy Hilberta)

III problem Hilberta:

czy wielościany (bryły o płaskich ścianach) o równych objętościach

są równoważne przez rozkład?

ten sam rok 1900

Max Dehn – istnieją wielościany o równych objętościach

nie dające się nałożyć na siebie za pomocą rozcinania na mniejsze wielościany i składania

(np. czworościan foremny i sześcian o tej samej objętości).

Każdy graniastosłup (również z podstawą) jest równoważny przez rozkład

z sześcianem o tej samej objętości!