BRZEG GROMOVA ∂G GRUPY HIPERBOLICZNEJ G O NIESKOŃCZENIE WIELU KOŃCACH

A1

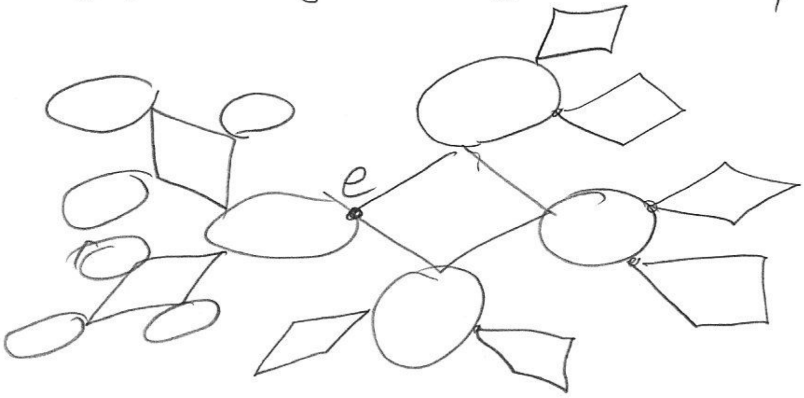
- Wiemy, że G ma ∞ wiele końców $\iff$ $\mathrm{Ends}(G) \cong$ Cantor.
- Wiemy też, że gdy G hiperboliczna, to końce G odpowiadają komponentom spójności ∂G.
- Jak wygląda zatem ∂G gdy hiperboliczna G ma ∞ wiele końców?

Rozważmy przypadek $\Gamma = G * H$

gdzie G, H nieskończone hiperboliczne

Niech S - sk. zb. gen. G, T - sk. zb. gen. H

$S \cup T$ - generatory $\Gamma = G * H$, $C = C(G*H, T\cup S)$ - graf Cayleya



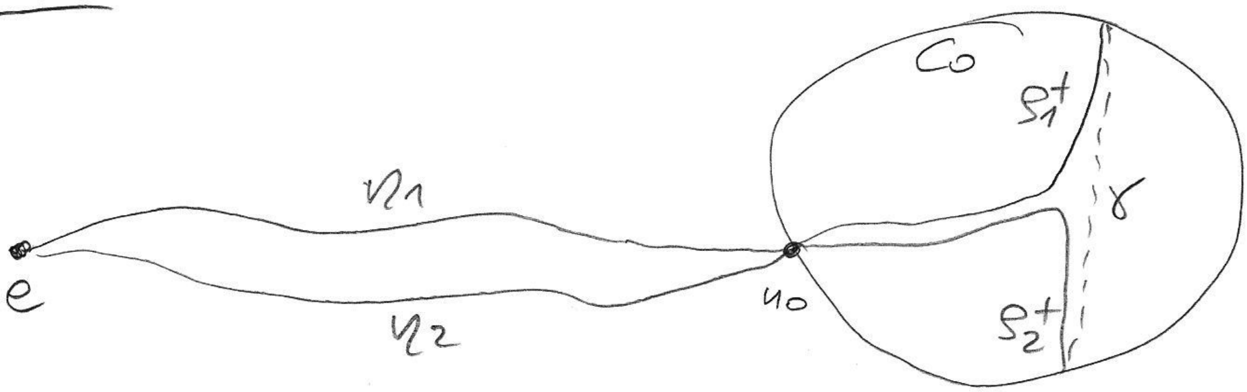
- promienie geodezyjne w C to kawałkami geodezyjne w kopiach $C(G,S)$ i $C(H,T)$ w C
- 2 rodzaje: (1) od pewnego miejsca w jednej kopii
  (2) przechodzą przez ∞ wiele kopii.

Dla każdej kopii C_0 grafu $C(G,S)$ w C, promienie geodezyjne [o początku w e] pozostające od pewnego miejsca w tej kopii wyznaczają podzbiór w $\partial\Gamma = \partial C$, który oznaczymy przez ∂C_0.

A2

FAKT 1. ∂C_0 jest metrycznie przeskalowaną kopią brzegu $\partial G = \partial C(G,S)$, o czynnik a^{-D}, gdzie D to odległość od e do tego wierzchołka w C_0 przez który wchodzą do C_0 promienie o początku w e.

D-d



$$\varrho_1 = \eta_1 \cup \varrho_1^+, \quad \varrho_2 = \eta_2 \cup \varrho_2^+$$

$$\langle \varrho_1, \varrho_2 \rangle_e = \langle \varrho_1^+, \varrho_2^+ \rangle_{u_0} + D$$

$$d_e([\varrho_1], [\varrho_2]) = a^{-\langle \varrho_1, \varrho_2 \rangle_e} = a^{-\langle \varrho_1^+, \varrho_2^+ \rangle_{u_0} - D} =$$

$$= a^{-D} \cdot d_{u_0}([\varrho_1^+], [\varrho_2^+]). \quad \square$$

FAKT 2 Dla różnych kopii C_0, C_0' grafów $C(G,S)$ lub $C(H,T)$ w C podzbiory $\partial C_0, \partial C_0' \subset \partial(G*H)$ są rozłączne

D-d: promienie ϱ, ϱ' pozostające od pewnego miejsca w C_0, C_0' [odpowiednio] są rozbieżne, więc wyznaczają różne punkty w $\partial(G*H)$. $\square$

WNIOSEK.
FAKTY 1+2 $\Longrightarrow$

$\partial(G * H)$ zawiera dużo parami rozłącznych (włożonych) kopii $\partial G_{\$}$ i ∂H.

Ten wniosek motywuje następująca definicję:

DEF. Dla danego układu $X_1, \dots, X_k$ niepustych zwartych przestrzeni metrycznych, zwartą przestrzeń metryczną Y nazywamy <u>gęstym amalgamatem</u> przestrzeni $X_1, \dots, X_k$ gdy można wyróżnić w niej nieskończoną przeliczalną rodzinę $\mathcal{Y}$ podzbiorów, podrozbitą jako $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{Y}_k$, taką, że:

(a1) podzbiory z $\mathcal{Y}$ są parami rozłączne, zaś dla $1 \le i \le k$ podrodzina $\mathcal{Y}_i$ składa się z włożonych kopii przestrzeni X_i;

(a2) rodzina $\mathcal{Y}$ jest <u>zerowa</u> (tzn. dla dowolnej metryki na Y zgodnej z topologią średnice zbiorów z $\mathcal{Y}$ dążą do 0);

(a3) każdy $Z \in \mathcal{Y}$ jest zbiorem brzegowym (tzn. jego dopełnienie $Y - Z$ jest gęste w Y, lub inaczej każdy $z \in Z$ jest granicą ciągu punktów z $Y - Z$);

(a4) $\forall i$ suma $\bigcup \mathcal{Y}_i$ rodziny $\mathcal{Y}_i$ jest gęsta w Y;

(a5) dowolne 2 punkty z Y nie należące do tego samego podzbioru z $\mathcal{Y}$ można oddzielić od siebie $\mathcal{Y}$-nasyconym otwarto-domkniętym podzbiorem $H \subset Y$ (H jest <u>$\mathcal{Y}$-nasycony</u> gdy każdy $Z \in \mathcal{Y}$ jest albo rozłączny z H, albo zawarty w H)

[gdy $k=0$, deklarujemy sztucznie $Y :=$ zb. Cantora – gęsty amalgamat pustej rodziny przestrzeni.]

A4

UWAGI.

1) Gęsty amalgamat układu złożonego z jednej 1-punktowej przestrzeni to zbiór Cantora (bo spełnia warunki charakteryzujące:
jest zwartą przestrzenią metryczną
- bez punktów izolowanych [(a3)+(a4)]
- całkowicie niespójna [(a5)]
[(a2) jest warunkiem pustym, (a1) nie gra roli]

2) Dla dowolnego skończonego układu $X_1, \dots, X_k$ niepustych zwartych p. metrycznych, ich gęsty amalgamat istnieje, i jest jednoznaczny z dokładnością do homeomorfizmu
[JŚ, 2016] „The dense amalgam of metric compacta and topological characterization of the boundaries of free products of groups"

OZNACZENIE: $\widetilde{\sqcup}(X_1, \dots, X_k)$.

LEMAT. G, H - nieskończone hiperboliczne (tak, że $\partial G \neq \emptyset$, $\partial H \neq \emptyset$). Wówczas
$$\partial(G * H) \cong \widetilde{\sqcup}(\partial G, \partial H).$$

A5

Dowód LEMATU:

Sprawdzamy warunki (a1) – (a5).

(a1) wynika z FAKTÓW 1 i 2

(a2) wynika z FAKTU 1 (że każdy ∂C_0 to przeskalowane o czynnik a^{-D} kopie $\partial(G,S)$ lub $\partial(H,T)$)

i z tego, że $\forall N$ zbiór tych kopii C_0, dla których $D = d(e, C_0) \leq N$ jest skończony.

(a3) czyli brzegowość dowolnego $Z \in \mathcal{Y}$

- niech Z odpowiada kopii C_0 grafu $C(G,S)$ lub $C(H,T)$ w C
- niech $z_0 \in Z$, $z_0 = [\rho_0]$, ρ_0 – promień o początku w e od pewnego miejsca pozostający w C_0 [powiedzmy: $\rho_0(k) \in C_0$ dla $k \geq N_0$]
- niech $\varepsilon > 0$ dowolne (dowolnie małe)

  znajdziemy $z = [\rho] \in \underset{\partial C}{\underset{\shortparallel}{\partial(G*H)}} \setminus Z$ takie że $d_e(z_0, z) < \varepsilon$.
- niech D t. że $a^{-D} < \varepsilon$ i niech $k > D$ całkowite t. że $k > N_0$
- niech ρ – dowolny promień geod. w C o początku e dochodzący do $\rho_0(k)$, a potem opuszczający C_0
- wówczas $z = [\rho] \notin Z = \partial C_0$ [$z \in \partial(G*H) \setminus Z$],
- ponieważ ρ i ρ_0 pozostają δ-blisko na dystansie $\geq k > D$,

mamy $d_e(z, z_0) = a^{-\langle \rho, \rho_0 \rangle} \leq a^{-k} < a^{-D} < \varepsilon$ □

A6

(α4) czyli gęstość $\bigcup \mathcal{Y}_1$ i $\bigcup \mathcal{Y}_2$ w $\partial(G*H) = \partial C$

- rozważmy dowolny $z_0 = [\varrho_0] \in \partial(G*H) = \partial C$ i niech $\varepsilon > 0$
- chcemy znaleźć $z \in \bigcup \mathcal{Y}_1$ t.że $d_e(z, z_0) < \varepsilon$
- B.S.O. $z_0 \notin \bigcup \mathcal{Y}_1$, czyli ϱ_0 nie leży od pewnego miejsca w kopii $C(G,S)$ w C
- niech $k > 0$ t.że $a^{-k} < \varepsilon$, zaś $\varrho_0(k)$ należy do pewnej kopii C' grafu $C(H,T)$ w C i nie jest wierzchołkiem w którym ϱ_0 wchodzi do tej kopii
- wtedy fragment początkowy $\varrho_0|_{[0,k]}$ promienia ϱ_0 można przedłużyć do promienia ϱ, który w wierzchołku $\varrho_0(k)$ opuszcza C', wchodzi do kopii C_0 grafu $C(G,S)$, i już w niej pozostaje
- wtedy $z = [\varrho] \in \bigcup \mathcal{Y}_1$, i jak poprzednio mamy

$$d_e(z, z_0) \leq a^{-k} < \varepsilon \ . \ \square$$

Warunek oddzielania (α5)

Pewna ogólna konstrukcja otwarto-domkniętego $\mathcal{Y}$-nasyconego podzbioru $M \subset \partial C = \partial(G*H)$:

- niech $u_0 \neq e$ dowolny wierzchołek w C, i niech C_0 będzie tą kopią $C(G,S)$ lub $C(H,T)$, do której wchodzi się przez u_0
- określmy $M = M_{u_0} := \{[\varrho] : \varrho$ jest promieniem wchodzącym przez u_0 do C_0, a potem dowolnym (opuszczającym C_0 lub nie)$\}$
- M jest otwarty, bo dla ϱ j.w., jeśli ϱ' biegnie dostatecznie długo δ-blisko od ϱ, to również wchodzi przez u_0 do C_0, więc $[\varrho'] \in M$
- M jest domknięty, bo jeśli $d_C(e, u_0) = k$, to dla $0 < \varepsilon_0 < a^{-k}$ mamy $d_e(M, \partial C \setminus M) \geq \varepsilon_0$
- $\mathcal{Y}$-nasyconość M wynika z tego, że każda kopia $C(G,S)$ lub $C(H,T)$ w C leży albo w całości „przed" u_0, albo w całości „za" u_0.

(A7)

Odróżnianie ze pomocą takich H:

- niech $z = [\varrho]$, $z' = [\varrho']$ - różne punkty z $\partial(G * H) = \partial C$

nie należące do tego samego $Z \in \mathcal{Y}$

- wtedy istnieje u_0 taki, że ϱ wchodzi przez u_0 do

dalszej kopii C_0 w C, zaś ϱ' wogóle nie przechodzi przez u_0
[tu jest kilka przypadków do rozważenia]

- dla $H = H_{u_0}$ mamy wtedy $z = [\varrho] \in H$ oraz

$z' = [\varrho'] \notin H$. $\square$ KONIEC DOWODU LEMATU

UWAGI.

(1) Podobnie dowodzi się, że gdy $\Gamma = G *_A H$,

A - skończona, to $\partial\Gamma \cong \tilde{\sqcup}(\partial G, \partial H)$,

a gdy $\Gamma = G *_A$ (HNN-rozszerzenie względem

skończonej podgrupy A), to $\partial\Gamma \cong \tilde{\sqcup}(\partial G)$

(2) Gdy grupa Γ ma ∞ wiele końców to, zgodnie

z tw. Stallingsa, rozkłada się (nietrywialnie)

nad skończoną podgrupą, w produkt wolny

z amalgamacją lub w HNN-rozszerzenie

(3) Gdy Γ jest hiperboliczna, to faktory powyższego

rozkładu też są hiperboliczne, i jeśli któryś ma

∞ wiele końców, to można go znów rozłożyć

(4) Z twierdzenia Dunwoody'ego, iterowanie rozkładów nad

skończonymi podgrupami j.w. (dla grup hiperbolicznych) zawsze

się kończy, zaś końcowe faktory (tzw. faktory terminalne)

są albo skończone, albo o jednym końcu

A8

5 Niech $H_1, \dots, H_K$ będzie układem terminalnych niekończonych faktorów rozkładu Γ nad skończonymi podgrupami. Wówczas

$$\partial\Gamma \cong \tilde{\bigsqcup}(\partial H_1, \dots, \partial H_K)$$

Łącznie z przypadkiem $\partial\Gamma = \tilde{\bigsqcup}\,\phi =$ zb. Cantora gdy $K=0$

[JŚ, 2016].

6 W sytuacji j.w. kopie ∂H_i w $\partial\Gamma$ są komponentami spójności $\partial\Gamma$, a ponadto jest jeszcze dużo 1-punktowych komponent spójności.