EXPONENCJALNA ROZBIEŻNOŚĆ, q.i.-NIEZMIENNICZOŚĆ HIPERBOLICZNOŚCI i STABILNOŚĆ QUASI-GEODEZYJNYCH

H1

Na płaszczyźnie hiperbolicznej $\mathbb{H}^2$ długość okręgu rośnie exponencjalnie wraz z promieniem r:

$$|O_r| = 2\pi \sinh(r) = 2\pi \frac{e^r - e^{-r}}{2}.$$

Znajdziemy odpowiedniki tej własności (i uogólnienia) dla dowolnej δ-hiperbolicznej p. geod. X.

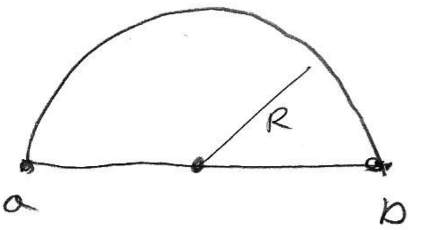
LEMAT 1. Niech p będzie krzywą długości $|p|$ łączącą punkty a, b w geodezyjnej δ-hiperbolicznej przestrzeni X, i niech $[a,b]$ będzie dowolną geodezyjną od a do b. Wówczas

$$[a,b] \subset N_D(p)$$

gdzie $D = \delta \cdot (\log_2 |p| + 1) + 1$.

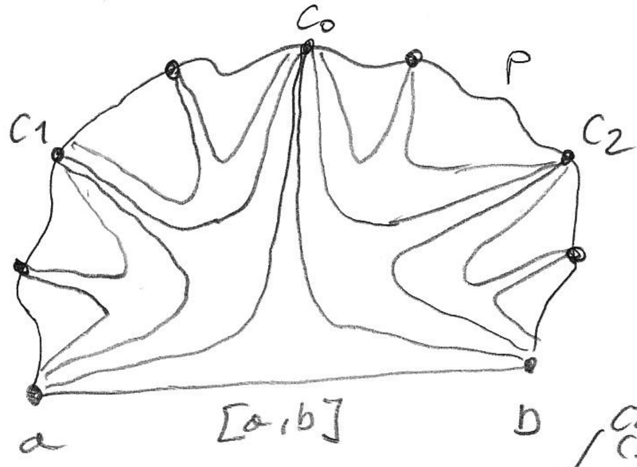
UWAGA: jest to nieprawda na płaszczyźnie euklidesowej

np. dla sytuacji



gdy $R \to \infty$.

Dowód LEMATU 1



c_0 – punkt podziału p na dwie krzywe długości $|p|/2$

c_1, c_2 – punkty podziału na 4 krzywe długości $|p|/4$

CZĘŚĆ CAŁKOWITA

Po $m = [\log_2|p|+1]$ krokach dostajemy punkty podziału $p_0=a, p_1, \dots, p_{2^m}=b$ z odcinkami $[p_i, p_{i+1}]_p$ krzywej p długości $|p|/2^m \le 1$.

Tworzymy trójkąty geodezyjne jak na rysunku. Z δ-szczupłości, kolejno otrzymujemy inkluzje

$$[a,b] \subset N_\delta([a\,c_0]\cup[c_0,b]) \subset N_{2\delta}([a,c_1]\cup[c_1,c_0]\cup[c_0,c_2]\cup[c_2,b])$$

$$\dots \subset N_{m\delta}\left(\bigcup_{i=1}^{2^m}[p_{i-1},p_i]\right) \subset N_{m\delta+1}(p)$$

gdzie ostatnia inkluzja wynika z tego, że dla $1\le i\le 2^m$ zachodzi $[p_{i-1},p_i] \subset N_1(\{p_{i-1},p_i\}) \subset N_1(p)$

Ponieważ $m\delta+1 \le D$, lemat zachodzi. □

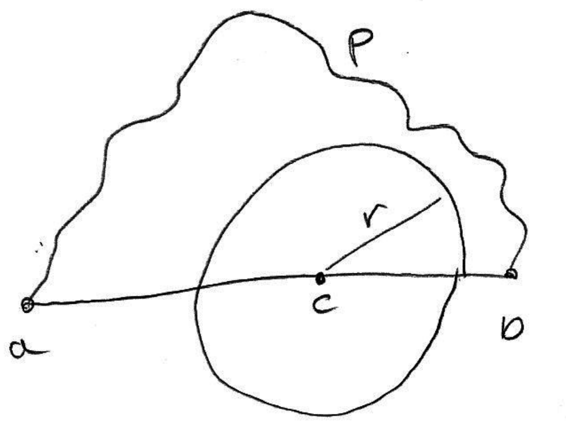
WNIOSEK 1 [eksponencjalna rozbieżność]

13

Istnieją stałe $c>0$, $a>1$ (zależne tylko od δ)

o następującej własności:

X - δ-hiperboliczna geodezyjna, $[a,b]$ - geodezyjna w X, c - punkt wewnątrz $[a,b]$, $r \leq \min[d(c,a), d(c,b)]$. Wtedy dowolna prostowalna krzywa p w X o końcach a i b przebiegająca poza otwartą kulą $B_r(c)$ ma długość $|p| \geq C\cdot a^r$.



Dowód:

- dla D z LEMATU 1 mamy $D \geq r$ (bo $d(c,p) \geq r$)
- stąd $\delta\cdot(\log_2|p|+1)+1 \geq r$
- po przekształceniach:

$$|p| \geq \left(2^{1/\delta}\right)^r / 2\cdot 2^{1/\delta}$$

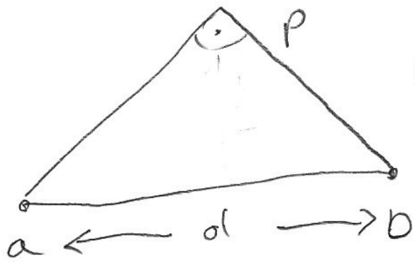
więc dla stałych $C = 1/2\cdot 2^{1/\delta}$, $a = 2^{1/\delta}$ wniosek zachodzi. □

Def. Prostowalna krzywa p w przestrzeni metrycznej X jest (λ, L)-quasi-geodezyjna (dla pewnych $\lambda \geq 1$, $L \geq 0$) gdy dla dowolnej podkrzywej $p' \subset p$ o końcach a', b' zachodzi $\frac{1}{\lambda}d(a',b') - L \leq |p'| \leq \lambda\cdot d(a',b') + L$.

UWAGA: równoważnie, gdy $p: [0,|p|] \to X$ jest równaniem tej krzywej sparametryzowanym długością, to jako odwzorowanie przedziału $[0,|p|]$ w X jest to (λ, L)-quasi-izometryczne włożenie.

LEMAT 2. Dla dowolnych $\delta \geq 0$, $\lambda \geq 1$, $L \geq 0$ istnieje $D = D(\delta, \lambda, L)$ takie że:
dla dowolnej (λ, L)-quasi-geodezyjnej p o końcach a, b w δ-hiperbolicznej przestrzeni X, i dla dowolnej geodezyjnej $[a,b]$ w X, $[a,b] \subset N_D(p)$.

UWAGA. Własność ta nie zachodzi na płaszczyźnie euklidesowej:



$d \to \infty$ $\quad$ p są $(\sqrt{2}, 0)$-quasi-geodezyjnymi.

FAJNA KONSEKWENCJA:

NAJPIERW ĆWICZENIE. p - (λ, L)-quasi geodezyjna o końcach a, b
q - dowolna ciągła krzywa o końcach a, b.
Jeśli $q \subset N_D(p)$ to $p \subset N_{(\lambda+1)D+L+1}(q)$. $\square$

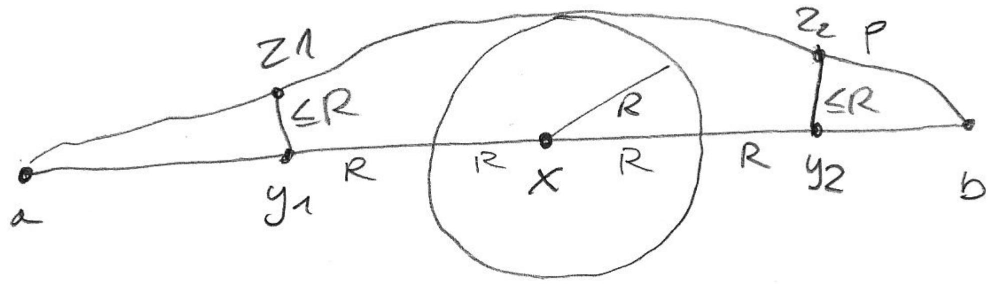
WNIOSKI.
(1) Przy założeniach z Lematu 1, $p \subset N_{(\lambda+1)D+L+1}([a,b])$
(2) Dla dowolnych dwóch (λ, L)-quasi-geodezyjnych o wspólnych końcach a, b zachodzi:

$p \subset N_{(\lambda+2)D+L+1}(q)$ [i symetrycznie, $q \subset N_{(\lambda+2)D+L+1}(p)$]

[bo $p \subset N_{(\lambda+1)D+L+1}([a,b]) \subset N_{(\lambda+1)D+L+1}(N_D(q)) \subset$
$\subset N_{(\lambda+2)D+L+1}(q)$ $\square$]

UWAGA. $D' = (\lambda+2)D + L + 1$ zależy tylko od δ, λ, L.
Zjawisko z punktu (2) jest zwane _stabilnością_ quasi-geodezyjnych.

Dowód LEMATU 2



Dla quasi-geodezyjnej p jak w LEMACIE, niech x będzie punktem z $[a,b]$ dla którego $d(x,p)=R$ jest maksymalne. Chcemy znaleźć uniwersalne oszacowanie R.

- Jeśli $d(a,x) \geq 2R$, określmy $y_1 \in [a,x]$ t.że $d(y_1,x)=2R$; jeśli $d(a,x) \leq 2R$, niech $y_1 = a$.
- Podobnie określmy $y_2 \in [x,b]$ ($y_2=b$ gdy $d(x,b) \leq 2R$).
- Wiemy, że $d(y_1,p) \leq R$, $d(y_2,p) \leq R$ więc niech z_1, z_2 – punkty na p t.że $d(y_i,z_i) \leq R$
- Niech $\overline{p} = [y_1,z_1] \cup [z_1,z_2]_p \cup [z_2,y_2]$

  Zauważmy, że geodezyjne $[y_i,z_i]$ są rozłączne z otwartą kulą $B_R(x)$ [z nierówności trójkąta]

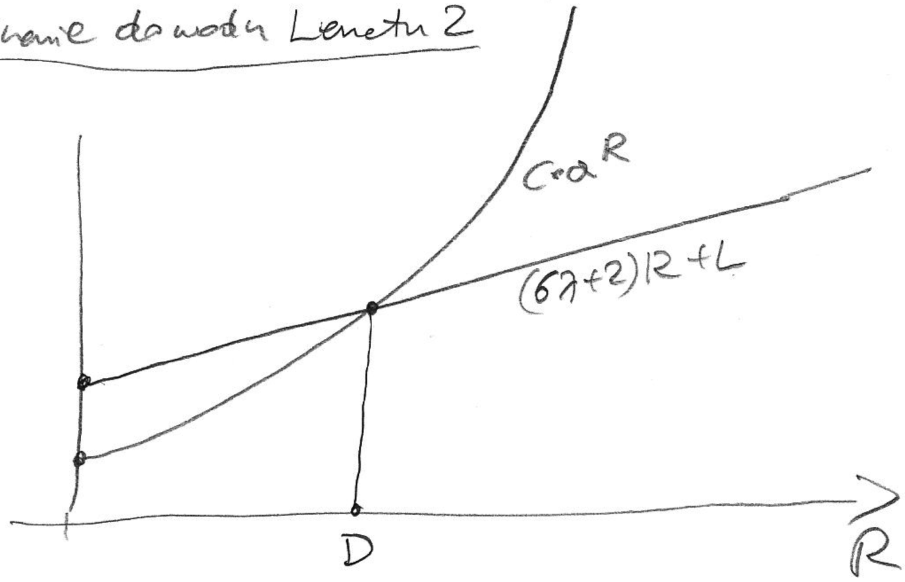
  więc cała krzywa $\overline{p}$ przebiega poza $B_R(x)$
- Oszacujmy długość $|\overline{p}|$: ① $d(z_1,z_2) \leq 6R$

  ② zatem $|[z_1,z_2]_p| \leq \lambda 6R + L$

  ③ $|\overline{p}| \leq (6\lambda+2)R + L$
- Z kolei z eksponencjalnej rozbieżności (WNIOSEK 1) mamy $|\overline{p}| \geq c \cdot a^R$

dokończenie dowodu Lematu 2

M6



Biorąc D jak na wykresie powyżej
(zależne tylko od λ, L oraz od c i a które zależą tylko od δ)
otrzymujemy $R \leq D$. $\square$

$\boxed{HG\frac{1}{2}}$

<u>LEMAT A</u> Niech $f:[0,d]\to X$ będzie (C,L)-q.i.-włożeniem w geodezyjną p. metryczną X. Wówczas istnieje $(C, 2C(C+L))$-quasi-geodezyjna q o końcach $f(0), f(d)$ t.że $q \subset N_{2C+2L}(f([0,d]))$ oraz $f([0,d]) \subset N_{C+L}(q)$.

<u>Dowód</u>: Rozważmy ciąg $(x_0, x_1, \dots, x_{\lceil d\rceil}) = (0, 1, \dots, \lceil d\rceil - 1, d)$ będący 1-drogą w $[0,d]$ od 0 do d.

Wówczas ciąg $f(x_i)$ jest $(C+L)$-drogą w Y od $f(0)$ do $f(d)$.

Połączmy te punkty $f(x_i)$ kolejno odcinkami geodezyjnymi otrzymując $(C, 2C(C+L))$-quasi-geodezyjną (pomijam elementarny argument).

Inkluzja $f([0,d]) \subset N_{C+L}(q)$ jest elementarna.

Inkluzja $q \subset N_{2C+2L}(f([0,d]))$ też jest elementarna. $\square$

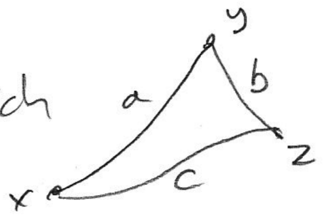
H7

Dowód quasi-izometrycznej niezmienniczości hiperboliczności.

Niech $f: X \to Y$ będzie (C,L)-quasi-izometrią (i zał. też że mamy odwrotną (C,L)-quasi-izometrię $g: Y \to X$ taką że $\|g f - id_X\| \leq C$).

Zał. że Y jest δ-hiperboliczne.

Chcemy pokazać, że X jest δ'-hiperboliczne dla pewnego $\delta' = \delta'(\delta, L, C)$ [zależnego tylko od δ, L, C natomiast nie od f, X, Y]

Niech 

będzie trójkątem geodezyjnym w X.

Obcięcie $f|_a: a \to Y$, $f|_b: b \to Y$, $f|_c: c \to Y$ są (C,L)-quasi-izometrycznymi włożeniami.

Z Lematu A, istnieją $(C, 2C(C+L))$-quasi-geodezyjne $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ w Y, o końcach $x' = f(x)$, $y' = f(y)$, $z' = f(z)$ odpowiednio t. że $f(a) \subset N_{L+C}(\tilde{a})$, $f(b) \subset N_{C+L}(\tilde{b})$, $f(c) \subset N_{C+L}(\tilde{c})$

$$\tilde{a} \subset N_{2L+2C}(f(a)), \quad \tilde{b} \subset N_{2L+2C}(f(b)), \quad \tilde{c} \subset N_{2L+2C}(f(c))$$

Z Lematu 2 i Wniosku (2) (dla $a' = [x', y']$, $b' = [y', z']$, $c' = [x', z']$) mamy

$$\tilde{a} \subset N_{D'}(a'), \quad \tilde{b} \subset N_{D'}(b'), \quad \tilde{c} \subset N_{D'}(c') \quad \text{oraz}$$
$$a' \subset N_{D'}(\tilde{a}), \quad b' \subset N_{D'}(\tilde{b}), \quad c' \subset N_{D'}(\tilde{c})$$

dla D' (zależnego tylko od C, L, δ.

Z δ-hiperboliczności Y mamy $a' \subset N_\delta(b' \cup c')$, $\boxed{H8}$

więc z „przedostatniości" otoczeń

$$f(a) \subset N_{L+C}(\tilde{a}) \subset N_{L+C+D'}(a') \subset N_{L+C+D'+\delta}(b' \cup c')$$

$$\subset N_{L+C+2D'+\delta}(\tilde{b} \cup \tilde{c}) \subset N_{\underbrace{3L+3C+2D'+\delta}_{D''}}(f(b) \cup f(c))$$

i analogicznie

$$f(b) \subset N_{D''}(f(a) \cup f(c)), \quad f(c) \subset N_{D''}(f(a) \cup f(b))$$

[D'' zależy tylko od δ, L, C].

Ponieważ $g : Y \to X$ jest (L, C)-quasi-izometrią, mamy

$$gf(a) \subset N_{CD''+L}(gf(b) \cup gf(c))$$

Ponieważ $\|gf - id_X\| \leq C$

[skąd wynika że $gf(a) \subset N_C(a)$ i $a \subset N_C(gf(a))$]

otrzymujemy

$$a \subset N_C(gf(a)) \subset N_{C \cdot D''+L+C}(gf(b) \cup gf(c)) \subset$$

$$\subset N_{\underbrace{C \cdot D''+L+2C}_{\delta'}}(b \cup c)$$

i analogicznie $b \subset N_{D'''}(a \cup c)$, $c \subset N_{D'''}(a \cup b)$

[δ' zależy tylko od δ, L, C]. $\square$