KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
LISTA 1. LICZBY KONSTRUOWALNE ORAZ
METODA ALGEBRAICZNA W ZADANIACH KONSTRUKCYJNYCH.

1. Mając dany odcinek jednostkowy, skonstruuj odcinki o długościach: $\frac{1}{5}$, $\frac{11}{17}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\frac{1}{3}}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $\sqrt[8]{2}$. Opisz schematycznie, za pomocą rysunków, etapy wykonywania tych konstrukcji.
2. Mając dane punkty $(0,0)$ i $(1,0)$ skonstruuj punkty $(2\frac{2}{3}, -1\frac{1}{7})$, $(-5\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{5})$.
3. Dany jest odcinek długości 1. Skonstruuj kwadrat, dla którego suma obwodu i pola wynosi 4.
4. Skonstruuj trójkąt równoramienny mając dan/y jego obwód $2p$ oraz wysokość $h = 1$.
5. Dane są odcinki a, b, c, d, e, f. Bez posługiwania się odcinkiem jednostkowym skonstruuj odcinki o następujących długościach: $\frac{ab}{c}$, $\frac{2a^2}{3b}$, $\frac{abc}{df}$, $\frac{a^2+2bc}{d}$, $\frac{ab}{3c+d}$, $\frac{a^2+2bc}{d+f}$, $\sqrt{\frac{1}{2}ab}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{c^2-d^2}$, $\sqrt{a^2+bc}$, $\sqrt{a^2+3b^2}$, $\sqrt{ab-\sqrt{2}cd}$, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{7}$, $a\sqrt{3}/(1+\sqrt{5})$, $\sqrt[4]{abcd}$, $\sqrt[4]{a^4-b^4}$, $\sqrt[4]{2a^4+3b^4}$.
6. Dane są odcinki a i b. Skonstruuj dwa odcinki
   (a) których suma jest równa a, zaś iloczyn jest równy b^2;
   (b) których różnica jest równa a, zaś iloczyn jest równy b^2.
7. Dane są punkty A i B których współrzędne są liczbami konstruowalnymi. Uzasadnij, że jeśli O jest początkiem układu wspólrzędnych, to następujące liczby
   a. długość odcinka AB;
   b. cosinus kąta AOB;
   c. pole trójkąta AOB;

   są liczbami konstruowalnymi.
8. Dany jest kąt α, którego cosinus jest liczbą konstruowalną. Uzasadnij, że nastęoujące liczby:
   a. $\sin\alpha$; b. $\cos\frac{1}{2}\alpha$;
   c. długość cięciwy okręgu jednostkowego opartej na kącie środkowym α;

   są liczbami konstruowalnymi.
9. Większy z boków danego prostokąta podziel konstrukcyjnie na takie dwie części, żeby suma pól kwadratów zbudowanych na tych dwóch częsciach była równa polu tego prostokąta.
10. Podaj konstrukcję *złotego podziału* danego odcinka. Przypomnijmy, że punkt C odcinka AB dzieli go w złotym stosunku, jeśli $AC : CB = AB : AC$. Wskazówka: przyjmij, że dany odcinek ma długość 1, dokonaj algebraicznych wyliczeń i naszkicuj wynikającą z nich konstrukcję.
11. (a) Uzasadnij obliczając kąty i znajdując pomocnicze trójkąty równoramienne, że jeśli w pięciokącie foremnym poprowadzimy dwie przecinające się przekątne, to na każdej z nich otrzymamy odcinek równy bokowi tego pięciokąta.

    (b) Udowodnij, że punkt przecięcia dwóch przekątnych w pięciokącie foremnym dzieli każdą z nich w złotym stosunku.

    (c) Podaj kontrukcję pięciokąta foremnego opartą na konstrukcji złotego podziału odcinka.

12. a. Uzasadnij, że jeśli c' jest cięciwą w okręgu jednostkowym opartą na kącie środkowym dwa razy mniejszym niż cięciwa c, to $c' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c^2}}$.

    b. Wyprowadź indukcyjnie wzór na długość boku 2^n-kąta oraz $3 \cdot 2^n$-kąta foremnego wpisanego w okrąg jednostkowy. Uzasadnij, że długość ta jest dla każdego $n \in N$ liczbą konstruowalną. Czy można było spodziewać się tego bez obliczeń?

13. Posługując się metodą algebraiczną uzasadnijże następujące konstrukcje są wykonalne za pomocą cyrkla i linijki:
    (a) konstrukcja kwadratu o polu równym polu danego trójkąta (kwadratura trójkąta);
    (b) konstrukcja koła o polu równym sumie pól dwóch danych kół (koło uznajemy za dane, jeśli dane są jego środek oraz promień);
    (c) podział danego trójkąta na dwie części o równych polach za pomocą prostej równoległej do wybranej podstawy.

    Ustal oznaczenia przyjmując jeden z danych odcinków za jednostkowy. Sprowadź problem do pytania o konstruowalność pewnego pojedynczego odcinka. Wyliczając długość tego odcinka uzasadnij, że jest on możliwy do skonstruowania.

14. Dane są punkty $(0, 0)$ oraz $(1, 0)$. Wylicz algebraicznie, że konstrukcja okręgu stycznego do okręgu $x^2 + y^2 = 1$ i przechodzącego przez punkty $A(2, 1)$ i $B(3, 2)$ jest wykonalna. Wskazówka: wylicz, że współrzędne środka oraz promień szukanego okręgu są liczbami konstruowalnymi.