KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
LISTA 10. GRUPY, PERMUTACJE, HOMOMORFIZMY, GRUPY ROZWIĄZALNE

Permutacje i grupy permutacji

1. Uzasadnij szczegółowo, że odwzorowanie $h : S_n \to C_2$ określone wzorem
$$h(\sigma) = \begin{cases} id & \text{gdy } \sigma \text{ jest permutacją parzystą} \\ (12) & \text{gdy } \sigma \text{ jest permutacją nieparzystą} \end{cases}$$
jest homomorfizmem grup.
2. Uzasadnij, że grupy (a) S_3, (b) S_n dla $n > 3$, (c) A_4, (d) A_n dla $n > 4$, nie są abelowe.
3. Uzasadnij, że cykl długości k jest permutacją parzystą wtedy i tylko wtedy gdy k jest liczbą nieparzystą.
4. Opisz grupę A_4 jako grupę symetrii czworościanu foremnego (tzn. opisz z jakich symetrii czworościanu się składa). To samo dla A_3 jako grupy symetrii trójkąta.
5. Opisz grupę symetrii rombu jako podgrupę w grupie S_4 permutacji wierzchołków tego rombu.

Rozwiązalność grup

6. Uzasadnij, że grupa wszystkich symetrii graniastosłupa prawidłowego trójkątnego (o podstawie będącej trójkątem równobocznym) jest nieabelowa, ale jest rozwiązalna. Wskazówka: rozważ naturalne odwzorowanie z tej grupy na dwuelementową grupę permutacji trójkątnych ścian (podstaw) graniastosłupa i uzasadnij, że jest to homomorfizm, a następnie użyj go do uzasadnienia rozwiązalności.
7. Dana jest grupa Q, zwana *grupą kwaternionową*, złożona z 8 elementów:
$$1, -1, i, -i, j, -j, k, -k.$$
Działanie w tej grupie określone jest przez następujące reguły, oraz regułę łączności:
   - 1 jest elementem neutralnym tej grupy,
   - $(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x$ dla dowolnego $x \in Q$, przy czym stosujemy konwencję, że $-(-a) = a$ dla $a = 1, i, j, k$,
   - $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ oraz $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$.

   (1) Oblicz $(-1)^2$, ji, $i \cdot (-j)$, $j \cdot (-i)$, $i \cdot (-i)$, $(-j) \cdot (-j)$ oraz $(-j) \cdot (-i)$.
   (2) Uzasadnij, że grupa Q nie jest przemienna.
   (3) Uzasadnij, że odwzorowanie $h : Q \to C_2 = (\{-1, 1\}, \cdot)$ zadane przez $h(1) = h(-1) = h(i) = h(-i) = 1$ oraz $h(j) = h(-j) = h(k) = h(-k)$ jest homomorfizmem grup.
   (4) Sprawdź, że jądro homomorfizmu h z punktu (3) jest abelową podgrupą w Q i wywnioskuj stąd, że grupa Q jest rozwiązalna.
   (5) [zadanie z *] Uzasadnij, że grupa Q nie jest izomorficzna z grupą symetrii kwadratu, która też jest ośmioelementowa, nieabelowa, i też jest rozwiązalna.
   Wskazówka: porównaj np. ilość elementów rzędu 2 w tych dwóch grupach.
8. Uzasadnij, w następujących krokach, że grupa K wszystkich 48 symetrii sześcianu jest rozwiązalna.
   (a) Rozważ odwzorowanie $h_1 : K \to C_2 = (\{-1, 1\}, \cdot)$, który przyporządkowuje element $1 \in C_2$ wszystkim symetriom sześcianu zachowującym orientację przestrzeni (czyli wszystkim obrotom i symetrii tożsamościowej), zaś element $-1 \in C_2$ wszystkim symetriom sześcianu zmieniającym orientację przestrzeni (symetriom lustrzanym względem rozmaitych płaszczyzn, symetrii środkowej względem środka sześcianu, i wszystkim pozostałym symetriom).
   (b) Pokoloruj wierzchołki sześcianu naprzemian na czarno i biało tak, że każde dwa wierzchołki należące do jednej krawędzi sześcianu mają dwa różne kolory. Uzasadnij, że każda symetria sześcianu albo zachowuje kolory wszystkich wierzchołków, albo zmienia kolory wszystkich. Rozważ odwzorowanie $h_2 : \ker(h_1) \to C_2$, które przyporządkowuje liczbę 1 tym symetriom, które zachowują kolory wierzchołków, zaś liczbę -1 tym, które zmieniają kolory. Wypisz wszystkich 12 symetrii należących do jądra $\ker(h_2)$ tego homomorfizmu.
   (d) Rozważ homomorfizm $h_3 : \ker(h_2) \to S_3$, które symetriom sześcianu przyporządkowuje permutaje trzyelementowego zbioru kierunków równoległych do krawędzi sześcianu, zgodnie z tym jak dana symetria zmienia kierunki krawędzi. Sprawdź, że obrazem tego homomorfizmu jest w istocie podgrupa A_3, więc jest to homomorfizm w grupę abelową. Wypisz wszystkie 4 symetrie należące do jądra $\ker(h_3)$ i sprawdź, że jądro to jest podgrupą abelową.
   (d) Zbierz i podsumuj kroki (a), (b) i (c) w kompletne uzasadnienie, że grupa K jest rozwiązalna.