KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
LISTA 2. CIAŁA LICZBOWE I ROZSZERZENIA KWADRATOWE.

1. (a) Dla liczb $p = (2/3) + \sqrt{3/5}$ oraz $q = 1 - (1/2)\sqrt{3/5}$ przedstaw ich sumę, różnicę, iloczyn i iloraz w postaci $a + b\sqrt{3/5}$, gdzie $a, b \in Q$.
   (b) Uzasadnij, że $\sqrt{3/5}$ nie jest liczbą wymierną, oraz że zbiór $\mathbf{Q}(3/5)$ złożony z wszystkich liczb postaci $a + b\sqrt{3/5}$, gdzie a i b są wymierne, jest ciałem.
   (c) Uzasadnij, że zapis dowolnej liczby x z ciała $\mathbf{Q}(3/5)$ w postaci $a + b\sqrt{3/5}$, gdzie a i b są wymierne, jest jednoznaczny.
2. Pokaż, że pierwiastki kwadratowe z liczb 5, $\sqrt{3}$ oraz $2+\sqrt{3}$ nie należą do ciała $Q(\sqrt{3})$.
3. Oznaczmy przez F ciało $Q(\sqrt{3})$, zaś przez k liczbę $2 + \sqrt{3}$.
   (a) Niech $p = 1 - \sqrt{3} - (1 + 2\sqrt{3})\sqrt{k}$ i $q = 2 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})\sqrt{k}$ będą liczbami z rozszerzenia kwadratowego $F(\sqrt{k})$. Przedstaw sumę, różnicę, iloczyn i iloraz liczb p i q w postaci $a + b\sqrt{k}$, gdzie a i b są liczbami z ciała F.
   (b) Czy liczba $\sqrt{3} + \sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$ należy do ciała $F(\sqrt{k})$?
4. Niech $F_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{3})$ i $F_2 = F_1(\sqrt{2 + \sqrt{3}})$ będą rozszerzeniami kwadratowymi. Znajdź postać ogólną elementów z ciała F_2. Zrób to samo dla $F_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{3})$ i $F_2 = F_1(\sqrt{\sqrt{3}})$.
5. Niech F będzie ciałem liczb postaci $p+q\sqrt[4]{2}$, gdzie p i q wyrażają sie jako $a+b\sqrt{2}$ dla a i b wymiernych. Przedstaw w tej postaci liczbę
$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt{2}\sqrt[4]{2}}$$
należącą do tego ciała.
6. Znajdź ciągi rozszerzeń kwadratowych dla następujących liczb konstruowalnych:
$$\frac{1}{\sqrt{2/3}+1},\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{6}},\ \sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{2}},\ 2 - \sqrt{3} + \sqrt[4]{3}.$$
7. Uzasadnij, że ciało $\mathbf{K}$ liczb konstruowalnych nie posiada żadnego rozszerzenia kwadratowego.
8. Uzasadnij, że $\sqrt[3]{2}$ jest liczbą niewymierną. A jak będzie z pierwiastkami wyższych stopni?
9. Udowodnij twierdzenie greckiego matematyka Teajteta z IV w. p.n.e. mówiące, że dla n naturalnych liczba $\sqrt{n}$ jest wymierna tylko wtedy gdy n jest kwadratem liczby naturalnej. A jak będzie z pierwiastkami wyższych stopni?
10. Zbadaj, czy zawsze wykonalna jest przy pomocy cyrkla i linijki konstrukcja odcinka, którego długość równa jest średniej a. arytmetycznej, b. geometrycznej, c. harmonicznej, d. kwadratowej z długości a, b, c danych trzech odcinków.
11. Dany jest odcinek a oraz dwa razy dłuższy odcinek d. Czy można za pomocą cyrkla i linijki skonstruować takie odcinki b i c, że długości a, b, c, d tworzą ciąg geometryczny?