

KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
LISTA 3. PIERWIASKI WIELOMIANÓW STOPNIA 3. NIEKONSTRUOWALNOŚĆ.

1. Zbadaj, czy następujące wielomiany mają pierwiastki wymierne:
 - a. $x^2 - 4x - 1$;
 - b. $x^3 - x^2 - 13x - 3$;
 - c. $4x^3 - 4x + 1$;
 - d. $8x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 2x - 1$.A czy mają pierwiastki konstruowalne?
2. Czy mając dany odcinek jednostkowy można skonstruować sześcián, dla którego suma pola powierzchni i objętości wynosi: (a) 5; (b) 3? Jeśli tak, to czy można skonstruować **wszystkie** sześciány o tej własności?
3. Czy odcinek długości 4 można konstrukcyjnie podzielić na trzy odcinki, z których dwa będą jednakowe, i to w taki sposób by prostopadłościán zbudowany na tych odcinkach miał objętość równą 1?
4. Czy jest konstruowalny trójkąt równoramienny, którego ramię ma długość 5, a promień koła wpisanego w ten trójkąt - długość 1? Rozwiąż to zadanie następującymi etapami:
 - a. Oznacz przez d połowę podstawy tego trójkąta i uzasadnij, że dla skonstruowania tego trójkąta potrzeba i wystarcza skonstruować odcinek d .
 - b. Dla znalezienia wielomianu, którego pierwiastkiem jest d przyrównaj do siebie wyrażenia na kwadrat pola trójkąta uzyskane ze wzorów $P = pr$ oraz $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p jest połową obwodu trójkąta, a, b, c są długościami jego boków, zaś r jest promieniem okręgu wpisanego.
 - c. Znajdź wymierny pierwiastek q uzyskanego wielomianu czwartego stopnia, przekonaj się że nie jest on równy d , podziel wielomian przez $x - q$ i zbadaj nowy wielomian stopnia 3.
5. Czy jest konstruowalny trójkąt równoramienny, którego dwusieczne mają długości 1, 1 i 2? Rozwiąż to zadanie w następujących krokach:
 - a. Oznacz przez α połowę kąta przy podstawie tego trójkąta i uzasadnij, że do jego skonstruowania potrzeba i wystarcza skonstruować odcinek długości $\sin \alpha$.
 - b. Wyraż długość podstawy AB trójkąta w terminach kąta α przy pomocy funkcji tangens zastosowanej do trójkąta prostokątnego powstałego z rozcięcia naszego trójkąta dwusieczną spuszczoną z wierzchołka przeciwległego do podstawy.
 - c. Wyraż długość podstawy AB inaczej, korzystając z twierdzenia sinusów zastosowanego do boków AB i AD trójkąta ABD , gdzie D jest drugim końcem dwusiecznej spuszczonej z wierzchołka A .
 - d. Przyrównaj do siebie wyrażenia na AB otrzymane w punktach b. i c. Wszystkie występujące funkcje trygonometryczne wyraż w terminach $\sin \alpha$. Doprowadź zależność do takiej postaci, w której $\sin \alpha$ okazuje się być pierwiastkiem pewnego wielomianu trzeciego stopnia.
 - e. Zbadaj otrzymany wielomian.
6. Czy jest wykonalny za pomocą cyrkla i linijki podział dowolnego kąta na 4, 5, 6, 7, 8, 9 równych części?
7. Czy można skonstruować cyrklem i linijką kąty $10^\circ, 5^\circ, 15^\circ, 25^\circ, 40^\circ, 75^\circ, 85^\circ$?
8. Uzasadnij metodą nie wprost, że jeśli x jest liczbą niekonstruowalną, to również niekonstruowalne są następujące liczby: $\frac{1}{2}x, \sqrt{x}, \sqrt{x+1}, x^2, x^2 + 2, x^2 + 3x + 1$. Czy liczba x^3 też musi być liczbą niekonstruowalną?