KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
LISTA 4. LICZBY ALGEBRAICZNE, ICH WIELOMIANY MINIMALNE I STOPNIE.

Ćwiczenia (do samodzielnego przerobienia - nie będą omawiane na zajęciach).

1. Znajdź wielomiany o współczynnikach całkowitych, których pierwiastkami są kolejno liczby:
$$\sqrt[4]{5},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ \sqrt{1+\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}.$$
2. Uzasadnij, że każda liczba algebraiczna stopnia 2 jest liczbą konstruowalną.
3. Wykonaj dzielenie (z resztą) wielomianu $x^3 - x^2 + 3x - 4$ przez wielomian $x^2 + 2x + 2$.
4. Sprawdź, że 1 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 2x^2 + 1$, a następnie przedstaw ten wielomian w postaci iloczynu $(x-1)\cdot Q(x)$.

Zadania.

1. Znajdź wielomiany o współczynnikach całkowitych, których pierwiastkami są kolejno liczby:
$$1-\sqrt{2}+\sqrt{3},\ 1+\sqrt[3]{2},\ \sqrt[5]{3}-1,\ \sqrt{2}+\sqrt[3]{2},\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}-1}.$$
2. Uzasadnij, że liczby $\cos 10^\circ$ oraz $\cos 18^\circ$ są liczbami algebraicznymi. Wskazówka: zastosuj wzór trygonometryczny na cosinus odpowiedniej wielokrotności kąta (znajdź gdzieś taki wzór, lub wyprowadź go sobie korzystając ze wzoru na cosinus sumy, lub korzystając ze wzoru de Moivre'a).
3. Znajdź wielomian stopnia 2 o całkowitych współczynnikach, którego pierwiastkiem jest liczba $3-2\sqrt{2}$, a następnie uzasadnij, że jest to wielomian minimalny tej liczby, a więc liczba ta ma stopień 2.
4. Czy niewymierny pierwiastek czwartego stopnia z liczby wymiernej może być liczbą algebraiczną stopnia 2?
5. Zbadaj, czy wielomian $2x^3 - 4x^2 + 3$ jest nierozkładalny nad Q (tzn. czy rozkłada się w iloczyn wielomianów o wymiernych współczynnikach).
6. Znajdź wielomian stopnia 3 o całkowitych współczynnikach, którego pierwiastkiem jest liczba $a = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$. Sprawdź, że jest to wielomian minimalny tej liczby, iże w konsekwencji ma ona stopień 3. Wskazówka: wylicz a^2 i a^3, a następnie znajdź kombinację liniową liczb $1, a, a^2$, z niewiadomymi współczynnikami x_0, x_1, x_2, równą liczbie a^3, rozwiązując układ równań na te współczynniki powstały z przyrównywania do siebie współczynników przy poszczególnych niewymiernościach; dla dowodu minimalności tak uzyskanego wielomianu sprawdź, że wielomian ten jest nierozkładalny.
7. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, znajdź wielomian czwartego stopnia o całkowitych współczynnikach, którego pierwiastkiem jest liczba $b = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$. W tym celu wyraź b^4 jako kombinację liczb 1, b, b^2 i b^3.
8. Uzasadnij, że jeśli $W(x)$ jest wielomianem minimalnym niewymiernej liczby algebraicznej u, to W nie posiada żednego pierwiastka wymiernego.
9. Uzasadnij, że liczba algebraiczna $\sqrt[4]{2}$ ma stopień 4. Wskazówka: sprawdź, że wielomian stopnia 4, którego pierwiastkiem jest ta liczba, nie rozkłada się w iloczyn dwóch wielomianów stopnia 2 nad Q, bo liczba ta nie może być pierwiastkiem wielomianu stopnia 2 o współczynnikach wymiernych; uzupełnij szczegóły argumentacji, że wielomian ten jest nierozkładalny nad Q, co pociąga jego minimalność.