GRUPY I ROZWIĄZALNOŚĆ

GRUPY:

Def. G – grupa. Podzbiór $H \subset G$ nazywamy podgrupą jeśli

(1) $\forall h \in H \quad h^{-1} \in H$

(2) $\forall h_1, h_2 \in H \quad h_1 \cdot h_2 \in H$.

PRZYKŁADY (ważne dla nas) – podgrupy w grupach permutacji S_n.

- cykl $(n_1\, n_2 \dots n_k)$ oznacza permutację

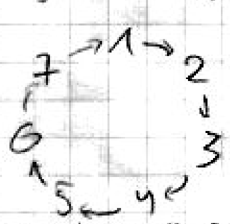
  $n_1 \to n_2 \to n_3 \to \dots \to n_k \to n_1$, $n \to n$ dla n nie występujących w cyklu

  Np. (1234) w S^5 to $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

- każda permutacja jest kombinacją cykli rozłącznych

  Np. $\sigma = (132)(45)$

(1) Podgrupa cykliczna C_n generowana przez cykl $\sigma = (1\,2\,3 \dots n)$ w S_n
to podgrupa złożona z cyklu σ i jego kolejnych potęg $\sigma^2, \sigma^3, \dots, \sigma^{n-1}$
$(\sigma^n = id)$.



(izomorficzna z grupą obrotów o kąty $k \cdot \frac{2\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$)

Podgrupy cykliczne są przemienne!

(2) Podgrupa A_n – złożona z wszystkich permutacji parzystych

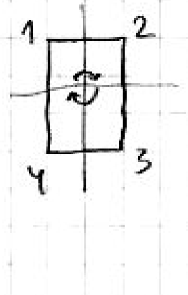
- $\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sigma \text{ składa się z parzystej liczby przestawień (lub jest złożeniem parzystej liczby transpozycji)} \\ -1 & \text{gdy } \sigma \text{ — " — nieparzystej — " —} \end{cases}$

$A_3 = \{id, (123), (132)\} = C_3$

$A_4 = \{id, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243),$
$(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

(3) Grupa czwórkowa

$\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset S_4$



abelowa

Def. homomorfizm - to odwzorowanie $h: G \to H$ grupy w grupę zachowujące działanie, tzn. $\forall g_1, g_2 \in G \quad h(g_1 \cdot g_2) = h(g_1) \cdot h(g_2)$.

PRZYKŁADY.

(1) $S_n \to C_2$ $\quad h(\sigma) = \begin{cases} (1\,2) & \text{gdy } \sigma \text{ nieparzysta} \\ id & \text{gdy } \sigma \text{ parzysta} \end{cases}$

Ponieważ $(12)\circ(12) = id$, itp, jest to homomorfizm.

grupa i homomorfizm trywialny

(2)

$S_4 \to S_3$

Cztery elementy 1,2,3,4 można na trzy sposoby rozbić na 2-elementowe podzbiory

$$A = \{\{\{1\,2\},\{3\,4\}\};\{\{1,3\}\{2,4\}\};\{\{1,4\}\{2,3\}\}\}$$

Permutacja $\sigma \in S_4$ tworzy nową permutację $h(\sigma)$ zbioru 3-elementowego A

Np. jeśli $\sigma = (123) \in S_4$ to $h(\sigma)$ działa tak

$$\{12\}\{3,4\} \to \{23\},\{1,4\} \to \{3,1\},\{2,4\} \to \{1\,2\},\{3,4\}$$

czyli $h(\sigma)$ jest cyklem długości 3 w A

UWAGA. Jeśli $\sigma \in A_4$ to $h(\sigma)$ jest albo id albo cyklem długości 3 w A. Tak więc po ograniczeniu się do A_4

h jest homomorfizmem $A_4 \to C_3$

LEMAT. $h(g^{-1}) = (h(g))^{-1}$. $\square$ $h(id_G) = id_H$.

Def. izomorfizm - to homomorfizm który jest wzajemnie jednoznaczny, a więc jest różnowartościowy i na.

Grupy pomiędzy którymi istnieje izomorfizm nazywamy izomorficznymi. O izomorficznych grupach myślimy że są jednakowe z algebraicznego punktu widzenia.

(1) C_n i obroty o $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ $\quad$ (2) grupa czwórkowa i symetrie prostokąta

(3) S_3 i symetrie trójkąta równobocznego $\quad$ (4) S_4 i symetrie czworościanu foremnego

Def. $h : G \to H$ homomorfizm. Jądrem h, oznaczanym symbolem $\ker h$, nazywamy zbiór

$$\ker h := \{g \in G : h(g) = id\}$$

Jądro składa się z przynajmniej jednego elementu bo $h(id) = id$ więc $id \in \ker h$.

PRZYKŁAD.

$$h : A_4 \to C_3$$

cykle (123) itd nie należą do $\ker h$

elementy $(12)(34)$ itd należą

$$\ker h = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

Jądro tego homomorfizmu jest podgrupą normalną w A_4.

LEMAT. Jądro ($\ker h$) dowolnego homomorfizmu $h : G \to H$ jest podgrupą w G.

d-d. (1) Niech $g \in \ker h$; sprawdźmy czy $g^{-1} \in \ker h$

$$id_G = g \cdot g^{-1} \qquad id_H = h(id_G) = h(g \cdot g^{-1}) = \underbrace{h(g)}_{= id_H} \cdot h(g^{-1}) = id_H \cdot h(g^{-1}) = h(g^{-1})$$

Zatem $h(g^{-1}) = id_H$ czyli $g^{-1} \in \ker H$

(2) Niech $g_1, g_2 \in \ker H$; sprawdźmy że $g_1 \cdot g_2 \in \ker H$

$h(g_1 g_2) = h(g_1) \cdot h(g_2) = id_H \cdot id_H = id_H$; zatem $g_1 \cdot g_2 \in \ker H$. □

TO MOŻNA EWENTUALNIE POMINĄĆ

LEMAT 2. Obraz $h(G) \subset H$ dowolnego homomorfizmu $h : G \to H$ jest podgrupą w H.

LEMAT 3. $h : G \to H$ homomorfizm. Jeśli $\ker H = \{id_G\}$ to homomorfizm h jest różnowartościowy. Jest on wówczas izomorfizmem grupy G i podgrupy $h(G) \subset H$.

dowód: załóżmy że $h(g_1) = h(g_2)$

Wtedy $h(g_1 g_2^{-1}) = h(g_1)\, h(g_2^{-1}) = h(g_1)\, (h(g_2))^{-1} = id_H$

czyli $g_1 g_2^{-1} \in \ker h = \{id_G\}$, czyli $g_1 g_2^{-1} = id_G$, czyli $g_1 = g_2$. □

DEFINICJA.
Podgrupa $H < S_n$ działa tranzytywnie jeśli dla każdych $1 \le i \ne j \le n$ istnieje $h \in H$ t.że $h(i) = j$.

LEMAT. Jeśli podgrupa $H < S_n$ działa tranzytywnie, to rząd tej podgrupy, $|H|$, jest podzielny przez n.

$$K := \{h \in H : h(1) = 1\}$$

$\forall i \ne 1$ niech $h_i \in H$ taki element, że $h_i(1) = i$

(istnieje, dzięki tranzytywności).

UZASADNIĘ że

$$\{h \in H : h(1) = i\} = h_i \circ K = \{h_i h : h \in K\}$$

$h \overset{\Phi}{\longmapsto} h_i h$ jest bijekcją między K i zbiorem $K_i := \{h \in H : h(1) = i\}$

– $\Phi : K \to K_i$ bo $h_i h(1) = h_i(1) = i$.

– Φ różnowartościowe, bo

$$\Phi(h) = \Phi(h') \Rightarrow \cancel{h_i} h = \cancel{h_i} h' \Rightarrow h = h'$$

– Φ jest surjekcja, bo jeśli $k \in K_i$

(tzn k jest permutacja t.że $k(1) = i$),

to $k = h_i(h_i^{-1} k)$

Zauważ, że $h_i^{-1} k \in K$ bo $h_i^{-1} k(1) = h_i^{-1}(i) = 1$

Zatem $k = \Phi(h_i^{-1} k)$

Zbiory K_i $i = 1, .., n$ są rozłączne (są to warstwy względem podgrupy K w H).
Zachodzi też $H = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$. Stąd $|H| = |K| \cdot n$, czyli $n \,|\, |H|$. □

ROZWIĄZALNOŚĆ – „PIĘTROWA ABELOWOŚĆ" R1

DEF. Grupa G jest rozwiązalna gdy jest abelowa

lub gdy istnieje ciąg homomorfizmów

$h_1 : G \to A_1$

$h_2 : ker(h_1) \to A_2$

$\vdots$

$h_n : ker(h_{n-1}) \to A_n$

„$(n+1)$-piętrowo abelowa"

taki, że grupy $A_1, \ldots, A_n$ są abelowe oraz podgrupa $ker(h_n)$ też jest abelowa.

UWAGA. Np. gdy G nie jest abelowa, ale posiada homomorfizm $h: G \to A$ w grupę abelową A taki, że jądro $ker(h)$ tego homomorfizmu jest abelową podgrupą w G, to G jest rozwiązalna („2-piętrowo abelowa").

PRZYKŁADY.

① Grupa S_3 nie jest abelowa. Rozważmy homomorfizm

$sgn: S_3 \to C_2$, gdzie C_2 jest abelowa

$ker(sgn) \overset{A_3 \cong}{=} C_3 \lhd S_3$, C_3 jest abelowa.

Zatem S_3 jest rozwiązalna („2-piętrowo abelowa")

WNIOSEK. $Gal(\mathbb{Q}_{x^3-2}/\mathbb{Q}) \cong S_3$

(składa się z wszystkich permutacji 3-elementowego zbioru pierwiastków).

Zatem $Gal(\mathbb{Q}_{x^3-2}/\mathbb{Q})$ jest rozwiązalna.

Na mocy tw. Galois, wszystkie pierwiastki wielomianu x^3-2 wyrażają się przez pierwiastniki (co zresztą widać i bez tw. Galois). □

ROZWIĄZALNOŚĆ – „PIĘTROWA ABELOWOŚĆ" R1

DEF. Grupa G jest <u>rozwiązalna</u> gdy jest abelowa

lub gdy istnieje ciąg homomorfizmów

$$h_1 : G \to A_1$$
$$h_2 : \ker(h_1) \to A_2$$
$$\vdots$$
$$h_n : \ker(h_{n-1}) \to A_n$$

„$(n+1)$-piętrowo abelowa"

taki, że grupy $A_1, \dots, A_n$ są abelowe oraz podgrupa $\ker(h_n)$ też jest abelowa.

UWAGA. Np. gdy G nie jest abelowa, ale posiada homomorfizm $h : G \to A$ w grupę abelową A taki, że jądro $\ker(h)$ tego homomorfizmu jest abelową podgrupą w G, to G jest rozwiązalna („2-piętrowo abelowa").

PRZYKŁADY.

① Grupa S_3 nie jest abelowa. Rozważmy homomorfizm

$\mathrm{sgn} : S_3 \to C_2$, gdzie C_2 jest abelowa

$\ker(\mathrm{sgn}) \overset{A_3 \cong}{=} C_3 \lhd S_3$, C_3 jest abelowa.

Zatem S_3 jest rozwiązalna („2-piętrowo abelowa")

PRZYKŁADY c.d.

R2

(2) Grupa S_4 nie jest abelowa.

Rozważmy ciąg homomorfizmów

$h_1 : S_4 \to C_2$, $h_1 = \mathrm{sgn}$, $\ker h_1 = A_4$

$h_2 : A_4 \to A_3 = C_3$, homomorfizm rozbicia obcięty do podgrupy $A_4 < S_4$,

$\ker(h_2) = K$ - grupa czwórkowa Kleina

Ponieważ grupy C_2, C_3 i K są abelowe,

S_4 jest „3-piętrowo abelowa”, czyli rozwiązalna.

R3

FAKT. Jeśli G jest rozwiązalna, to jej dowolna podgrupa $H < G$ też jest rozwiązalna.

Dowód: Jeśli G abelowa, to H też abelowa, więc rozwiązalna.

Jeśli G nieabelowa rozwiązalna, to istnieje ciąg homomorfizmów

$h_1 : G \to A_1$

$h_2 : ker(h_1) \to A_2$

$\vdots$

$h_n : ker(h_{n-1}) \to A_{n}$

takich, że $A_1, A_2, \dots, A_n$ oraz $ker(h_n)$ są abelowe

Pokażemy podobny ciąg dla podgrupy $H < G$.

$h_1' : H \to A_1$, $h_1' = h_1|_H$

wtedy $ker(h_1') = ker(h_1) \cap H$ jest podgrupą w $ker(h_1)$

czyli $ker(h_1') < ker(h_1)$

$h_2' : ker(h_1') \to A_2$, $h_2' = h_2|_{ker(h_1')}$

znowu wnioskujemy, że $ker(h_2') < ker(h_2)$

$\vdots$

$h_n' : ker(h_{n-1}') \to A_n$, $h_n' = h_n|_{ker(h_{n-1}')}$

i wnioskujemy, że $ker(h_n') < ker(h_n)$

czyli $ker(h_n')$ – abelowa.

Zatem $A_1, \dots, A_n$ oraz $ker(h_n')$ abelowe, czyli H jest rozwiązalna.

R4

PRZYKŁADY.

- Grupa alternująca A_4 jest rozwiązalna.
- Grupa symetrii kwadratu (8-elementowa, będąca podgrupą w grupie wszystkich 24 permutacji 4 wierzchołków kwadratu) jest rozwiązalna

(bo jest podgrupą w rozwiązalnej grupie S_4).