LICZBY ZESPOLONE – POWTÓRKA

- i – jednostka urojona, czyli taka liczba, że $i^2=-1$
  (czasami nazywa się ją „pierwiastkiem z -1" – $\sqrt{-1}$)

- <u>liczba zespolona</u> – dowolna liczba z postaci $z = a+b\cdot i$, $a,b\in\mathbb{R}$

  a – <u>część rzeczywista</u> liczby z, $Re(z)=a$

  b – część urojona liczby z, $Im(z)=b$

- liczby rzeczywiste są przykładami liczb zespolonych i mają postać $a = a+0\cdot i$

- zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$;
  zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jest jego podzbiorem, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

- Zbiór $\mathbb{C}$ jest ciałem liczbowym, gdyż można w nim wykonywać działania arytmetyczne:

$$(a+bi)+(c+di)=[a+c]+[b+d]i$$

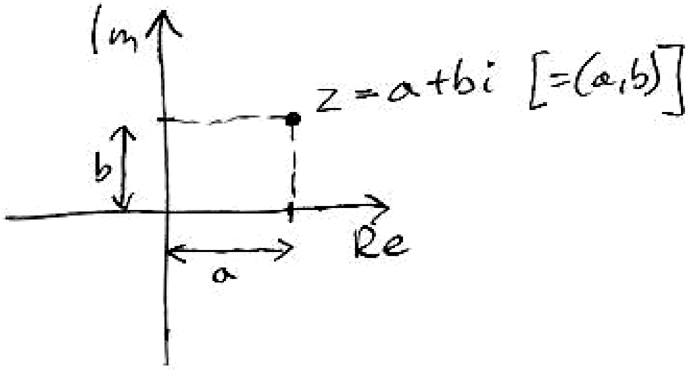
$$(a+bi)-(c+di)=[a-c]+[b-d]i$$

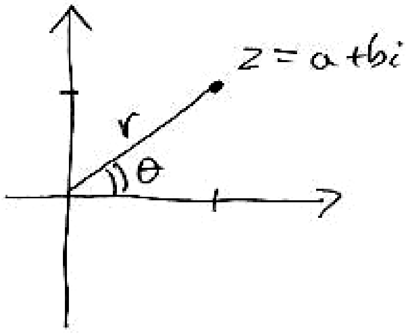
$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=$$
$$=[ac-bd]+[ad+bc]i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^2-(bi)^2}=\frac{a-bi}{a^2-i^2b^2}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

INTERPRETACJA GRAFICZNA LICZBY ZESPOLONEJ





- $r = |z|$ – moduł (lub długość) liczby zesp. z

  $r = \sqrt{a^2+b^2}$

- $\theta \in [0, 2\pi)$ – argument liczby zesp. z

- moduł i argument spełniają zależności:

  $a = r \cdot \cos\theta$, $b = r \cdot \sin\theta$

- <u>postać</u> trygonometryczna liczby $z = a+bi$:

$$z = a+bi = r\cdot\cos\theta + r\cdot\sin\theta\cdot i =$$

$$= \boxed{r\cdot[\cos\theta + i\cdot\sin\theta]}$$

- postać trygonometryczna szczególnie dobrze nadaje się do mnożenia liczb zespolonych, a już wręcz rewelacyjnie do ich potęgowania

- interpretacja geometryczna mnożenia:

$$\left[r_1(\cos\theta_1 + i\cdot\sin\theta_1)\right]\cdot\left[r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right] =$$

$$= r_1\cdot r_2\cdot\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

(mnożenie modułów
i dodawanie argumentów)

- interpretacja geometryczna potęgowania –
– wzór de Moivre'a

$$z = r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$$

$$z^n = r^n\cdot\left(\cos(n\theta) + i\cdot\sin(n\theta)\right)$$

(potęgowanie modułu i n-krotność argumentu)

3+

- odwrotnością potęgowania jest pierwiastkowanie i wzór de Moivre'a pozwala też znaleźć pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej $z = r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$; są to liczby:

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\cdot\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

$$w_2 = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+2\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{n}+2\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

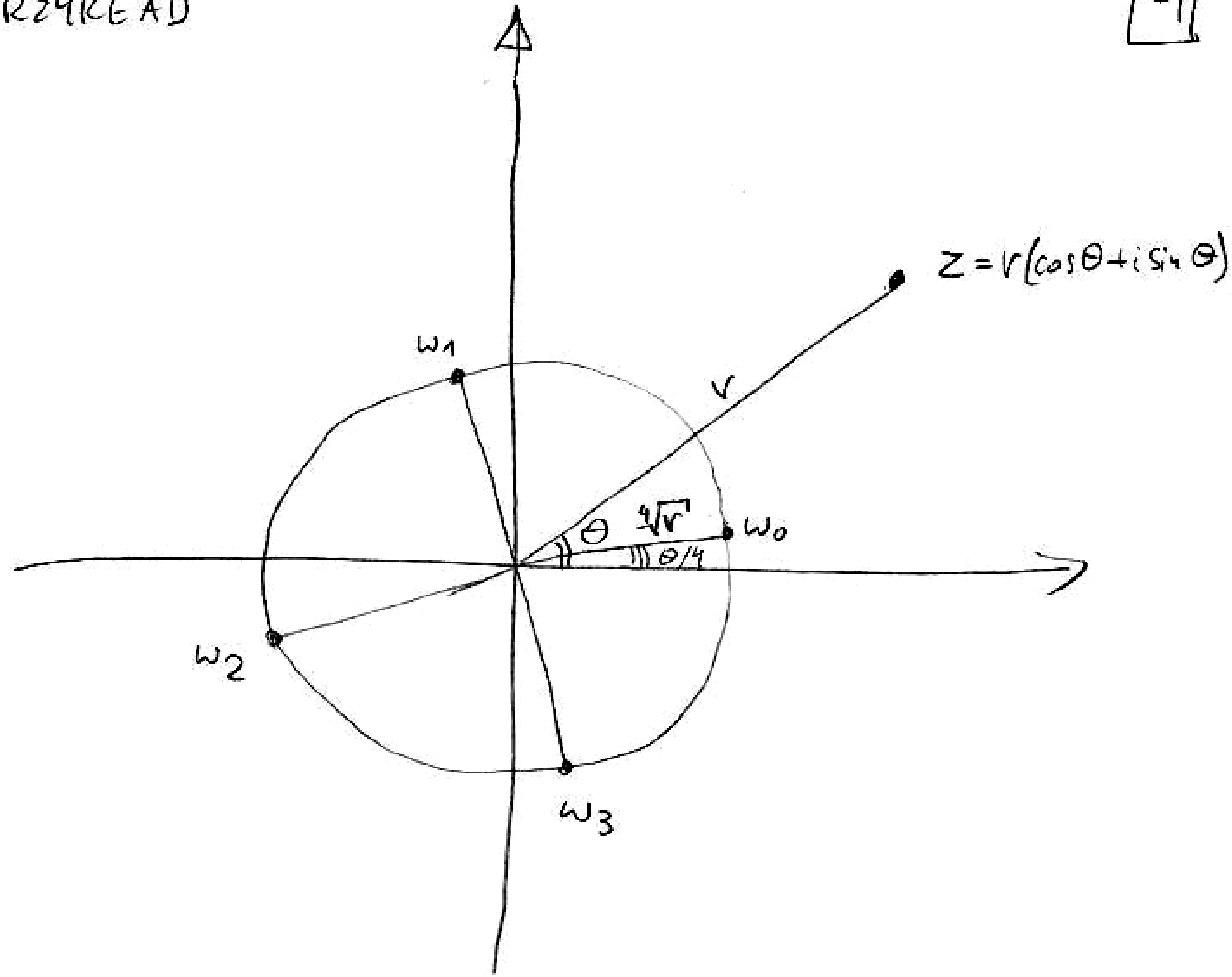
$$\vdots$$

$$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

W skrócie te n pierwiastków n-tego stopnia z liczby z zapisujemy jako:

$$\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right],\ k=0,1,\dots,n-1.$$

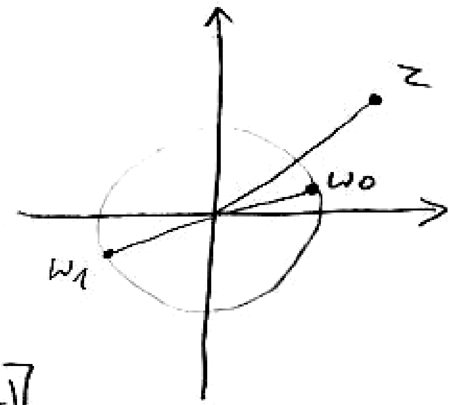
PRZYKŁAD



Pierwiastki 4-go stopnia z liczby $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Pierwiastki kwadratowe (2-go stopnia):

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$



pierwiastki z liczby z:

$$w_0 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$w_1 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right] =$$

$$= -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = -w_0$$

Np. pierwiastki kwadratowe z liczby -7 to:

$i\cdot\sqrt{7}$ oraz $-i\sqrt{7}$

RÓWNANIA KWADRATOWE

Wiedząc jak wyliczać pierwiastki kwadratowe z liczb zespolonych, potrafimy też rozwiązywać równanie kwadratowe

$ax^2+bx+c=0$ dla a,b,c – zespolonych

(w szczególności takie, gdzie $a,b,c\in\mathbb{R}$, ale $\Delta<0$).

Robi się to z użyciem wzoru:

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

gdzie za $\sqrt{\Delta}$ wpisujemy kolejno pierwiastki kwadratowe w_0 oraz $w_1=-w_0$ opisane powyżej.

PIERWIASTKI Z JEDYNKI

- Liczba 1 zapisuje się jako $1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$
- W takim razie pierwiastki n-tego stopnia z 1 to

$$w_0 = \sqrt[n]{1}\cdot\left(\cos\frac{0}{n} + i\sin\frac{0}{n}\right) = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0) = 1$$

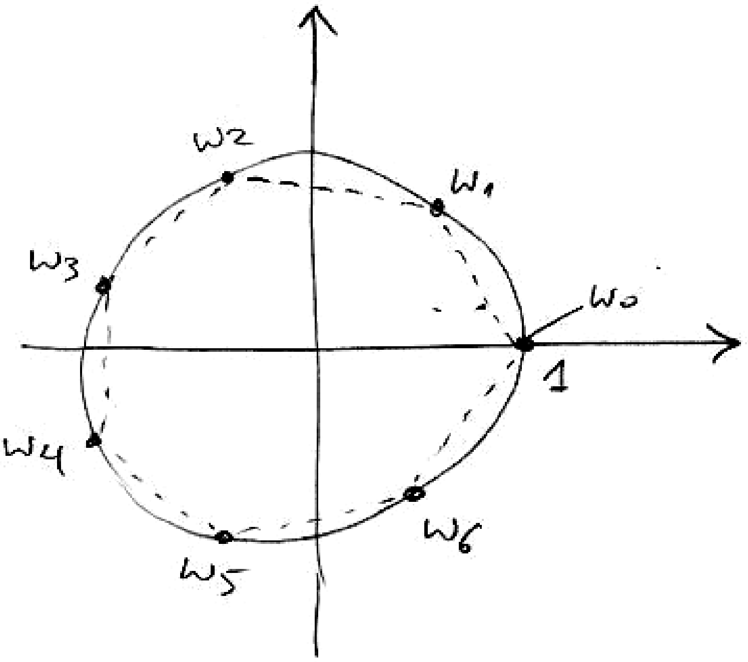
$$w_1 = \sqrt[n]{1}\cdot\left[\cos\left(\frac{0}{n}+\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{0}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right] = 1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1} = \cos\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right)$$

- ogólnie, $w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=0,1,\dots,n-1$



Pierwiastki 7-go stopnia z $\underline{1}$

(wierzchołki 7-kąta foremnego wpisanego w koło jednostkowe – jednym z nich jest liczba 1)