PRZYPOMNIENIA

- liczbę a nazywamy <u>liczbą algebraiczną</u> gdy jest pierwiastkiem pewnego wielomianu $W(x)$ o wymiernych (równoważnie, całkowitych) współczynnikach $(W \in \mathbb{Q}[x])$.

- <u>Wielomian minimalny</u> liczby algebraicznej a to wielomian najmniejszego stopnia (z $\mathbb{Q}[x]$) zerujący liczbę a.

  FAKT 1. Jest określony jednoznacznie z dokładnością do czynnika wymiernego.

  FAKT 2. Wielomian z $\mathbb{Q}[x]$ zerujący liczbę a jest jej wielomianem minimalnym wtedy i tylko wtedy gdy jest nierozkładalny nad $\mathbb{Q}$, tzn. nie da się przedstawić jako iloczyn dwóch wielomianów z $\mathbb{Q}[x]$ stopni ≥ 1.

- <u>Stopień</u> liczby algebraicznej a to stopień wielomianu minimalnego tej liczby.

PRZYKŁADY DO TWIERDZENIA 4.12

(1) Ciało $Q(\sqrt{2})$ składa się z liczb postaci

$p + q \cdot \sqrt{2}$, $p, q \in Q$

i przedstawienie w tej postaci jest jednoznaczne.

(2) Ciało $Q(\sqrt[3]{2})$ składa się z liczb postaci

$p + q\sqrt[3]{2} + r \cdot (\sqrt[3]{2})^2 = p + q\sqrt[3]{2} + r \cdot \sqrt[3]{4}$ $p, q, r \in Q$

i przedstawienie w tej postaci jest jednoznaczne.

$\mathbb{C}$ - ciało liczb zespolonych

$(\mathbb{C} : \mathbb{R}) = 2$ bo każda liczba zespolona z

jednoznacznie przedstawia się w postaci $a + bi$ $a, b \in \mathbb{R}$,

zatem układ liczb $\{1, i\}$ jest bazą tego rozszerzenia.

PRZYKŁAD

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset L\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right) = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & \| & \| \\ K & L & M \end{array}$$

Mamy $(L:K)=2$.

Bazą tego rozszerzenia jest np. układ $1, \sqrt{2}$.

Mamy też $(M:L)=2$.

Bazą jest np. $1, \sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Ciało $M = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$ składa się z elementów postaci

$$p + q\sqrt{2} + r \cdot \sqrt{1+\sqrt{2}} + s\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}} \qquad p,q,r,s \in \mathbb{Q}.$$

Przedstawienie w tej postaci jest jednoznaczne.

Zatem stopień rozszerzenia $(M:K)$ wynosi 4.

Bazą jest np. układ

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

czyli układ iloczynów

$$1\cdot 1, 1\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{2}\cdot 1, \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

elementów z wcześniej wskazanych baz $1, \sqrt{2}$ i $1, \sqrt{1+\sqrt{2}}$.