Zadania z Kombinatorycznej Teorii Grup
Lista 1. Grupa wolna.

Konsekwencje definicji

1. Niech G będzie grupą wolną względem S, i niech $T \subset S$. Uzasadnij, że podgrupa $H = \langle T \rangle$ generowana przez T jest wolna względem T.
2. Niech G będzie dowolną grupą ze zbiorem generatorów S. Udowodnij, że G jest (izomorficzna z) ilorazem grupy wolnej F_S. Wywnioskuj stąd, że każda grupa jest ilorazem grupy wolnej.
3. Uzasadnij, że grupa wolna dowolnej rangi większej od 1 jest nieabelowa.
4. (a) Pokaż, że każda grupa wolna P posiada następującą uniwersalną własność, zwaną *projektywnością*. Dla dowolnych grup G, H dowolnego **surjektywnego** homomorfizmu $\gamma : G \to H$, i dowolnego homomorfizmu $\pi : P \to H$, istnieje homomorfizm $\phi : P \to G$ taki, że $\gamma\phi = \pi$.
   (b) Pokaż, że dowolna grupa projektywna P jest izomorficzna z pewną podgrupą w pewnej grupie wolnej. (Ponieważ później pokażemy, że każda podgrupa grupy wolnej jest wolna, stąd (a) i (b) oznaczają, że grupy wolne są scharakteryzowane własnościa projektywności.)
5. Uzasadnij, że jeśli $G \to F$ jest homomorfizmem na grupę wolną F, zaś N jest jądrem tego homomorfizmu, to grupa G jest izomorficzna z pewnym produktem półprostym grupy N przez grupę F. Pokaż, że jeśli F nie jest grupą wolną, to tak być nie musi.

Konsekwencje konstrukcji (opisu) grup wolnych

6. Uzasadnij, że każda grupa wolna jest beztorsyjna (nie posiada żadnego różnego od 1 elementu skończonego rzędu).
7. Uzasadnij, że grupa wolna rangi ≥ 2 ma trywialne centrum.
8. Dla $a \in G$, niech $i_a : G \to G$ będzie automorfizmem wewnętrznym zadanym wzorem $i_a(g) = aga^{-1}$. Uzasadnij, że jeśli F jest grupą wolną rangi ≥ 2, to dla różnych $a \in F$ automorfizmy i_a są różne. Pokaż też, że odwzorowanie $a \to i_a$ jest homomorfizmem. (W ten sposób grupa F wkłada się w kanoniczny sposób w swoją grupę automorfizmów $\mathrm{Aut}(F)$.)
9. Uzasadnij, że w grupie wolnej dwa nietrywialne elementy komutują wtedy i tylko wtedy gdy są potęgami tego samego trzeciego elementu.

   Wskazówka: (1) najpierw pokaż, że jeśli komutujące elementy są reprezentowane zredukowanymi słowami u, w, to dla pewnego słowa x (być może pustego) mamy $u = x\bar{u}x^{-1}$, $w = x\bar{w}x^{-1}$, $\bar{u}, \bar{w}$ reprezentują (być może inne) komutujące elementy, zaś slowo $\bar{u}\bar{w}$ jest albo zredukowane, albo w procesie jego redukcji redukuje się całe $\bar{u}$ lub całe $\bar{w}$; (2) dla komutujących elementów reprezentowanych słowami o takich własnościach jak $\bar{u}$ i $\bar{w}$ zastosuj indukcję względem sumy długości $|\bar{u}| + |\bar{w}|$.
10. Uzasadnij, że abelowe podgrupy w grupach wolnych są cykliczne.
11. Uzasadnij, że podgrupa $H = \langle Q \rangle$ w grupie wolnej względem $S = \{a, b\}$ generowana przez zbiór $Q = \{a^{-n}ba^n : n \geq 1\}$ jest wolna względem Q. Wywnioskuj stąd, że F_2 posiada podgrupy izomorficzne z F_k dla dowolnego naturalnego k.

Komutant i abelianizacja

Przypomnijmy, że dla dwóch elementów a, b grupy G ich *komutatorem* nazywamy element $aba^{-1}b^{-1}$ (ozn. $[a, b]$). *Komutant* grupy G to podgrupa generowana przez wszystkie komutatory, czyli podgrupa $[G, G] = \{[a, b] : a, b \in G\}$.

12. Pokaż, że komutant dowolnej grupy jest jej dzielnikiem normalnym. Wskazówka: najpierw pokaż że sprzeżenie dowolnego komutatora jest komutatorem (innych elementów).
13. Uzasadnij, że grupa ilorazowa $G/[G, G]$ jest abelowa. Ogólniej, jeśli $[G, G] < N \triangleleft G$ to G/N jest abelowa.

Grupę $G/[G, G]$ nazywamy *abelianizacją* grupy G, i oznaczamy też przez G^{ab}.

14. Wykaż, że abelianizacja grupy wolnej F_S jest izomorficzna z grupą Z^S, czyli sumą prostą $|S|$ kopii grupy Z (lub jeszcze inaczej, grupą wszystkich funkcji $S \to Z$ o skończonym nośniku, z mnożeniem punktowym). Wskazówka: rozważ naturalny homomorfizm $F_S \to Z^S$ i udowodnij, że jego jądro pokrywa się z komutantem grupy F_S.

Klasy sprzężoności w grupach wolnych

Cyklicznym przestawieniem słowa w nazywamy dowolne słowo postaci vu dla pewnego podziału $w = uv$ słowa w.

15. Udowodnij, że w grupie wolnej F_S słowo w' otrzymane przez cykliczne przestawienie ze słowa w reprezentuje element sprzeżony do elementu reprezentowanego przez w.

Dwa słowa nazywamy *cyklicznie równoważnymi* jeśli jedno można uzyskać z drugiego za pomocą skończonego ciągu złożonego z operacji elementarnych i cyklicznych przestawień. Słowo nazywamy *cyklicznie zredukowanym* jeśli jest zredukowane, oraz jego ostatnia litera nie jest odwrotnością pierwszej litery.

16. Uzasadnij, że:
    (a) cyklicznie równoważne słowa reprezentują elementy sprzężone;
    (b) każda klasa abstrakcji relacji cyklicznej równoważności zawiera dokładnie jedno (z dokładnością do cyklicznego przestawienia) słowo cyklicznie zredukowane;
    (c) dwa słowa reprezentują elementy sprzężone w grupie F_S wtedy i tylko wtedy gdy ich cykliczne redukcje są równe (z dokładnością do cyklicznego przestawienia).

    Zauważ, że punkt (c) stanowi rozwiązanie *problemu sprzężoności* w grupach wolnych (czyli pytania o algorytm decydujący, czy dwa elementy wyrażone za pomocą generatorów są sprzężone).

Inne zadania

17. Uzasadnij, powołując się na odpowiednie własności grup wolnych (lub je wyprowadzając), że następujące grupy nie są grupami wolnymi: $SL(2, Z)$, Z^n dla $n > 1$, grupa addytywna Q liczb wymiernych, produkt kartezjanski dowolnych dwóch grup nietrywialnych.