Zadania z Kombinatorycznej Teorii Grup
Lista $2\frac{1}{2}$

Zastosowania teorii Nielsena (i wyprowadzonych z niej wniosków)

1. Uzasadnij, że zbiór elementów a^2, ab, ba w sposób wolny generuje podgrupę w grupie wolnej $F_{\{a,b\}}$. Wskazówka: sprawdź czy układ ten jest N-zredukowany (zredukowany w sensie Nielsena), a jeśli nie jest, to zmodyfikuj go za pomocą elementarnych transformacji Nielsena.
2. Niech $h : F_n \to F_m$ będzie dowolnym **surjektywnym** homomorfizmem grup wolnych skończonej rangi. Uzasadnij, że wówczas istnieje baza Y w F_n, będąca sumą rozłączną $Y = Y_1 \cup Y_2$ taka, że:
   (i) h obcięte do podgrupy generowanej przez Y_1 jest izomorfizmem na F_m, oraz
   (ii) h obcięte do podgrupy generowanej przez Y_2 jest homomorfizmem trywialnym.
   Wskazówka: dla dowolnej bazy X w F_n rozważ układ $h(X)$ w F_m oraz transformacje Nielsena przekształcające go w układ $(u_1, \dots, u_n)$, w którym podukład $(u_1, \dots, u_m)$ jest bazą F_m, zaś $u_j = 1$ dla $j > m$.
3. Około roku 1930 Hopf postawił problem, czy istnieje grupa skończenie generowalna G, której właściwy iloraz G/H jest izomorficzny z G. Grupy G, których żaden właściwy iloraz nie jest izomorficzny z G nazwane zostały grupami *hopfowskimi*. Udowodnij, że grupy wolne skończonej rangi są grupami hopfowskimi. Wskazówka: pokaż, że każdy surjektywny homomorfizm $h : F_n \to F_n$ jest izomorfizmem; w tym celu rozważ układ $U = h(X)$ obrazów elementów ze standardowej bazy X w F_n.

   KOMENTARZ: pierwsze grupy nie-hopfowskie zostały odkryte w latach 50-tych przez Higmana i Neumanna.
4. Rozważmy grupę wolną F_S, $S = \{a, b\}$, i niech $c = [a, b]$ będzie komutatorem generatorów. Udowodnij, że każdy automorfizm grupy F_S przeprowadza c albo na c albo na c^{-1} albo na sprzeżenie jednego z tych elementów. Wskazówka: użyj generatorów grupy automorfizmów oraz cyklicznie zredukowanych reprezentantów klas sprzężoności.
5. Niech a, b będą takimi elementami grupy wolnej F, że pewne ich potęgi a^m, b^n, dla $m, n \neq 0$, komutują. Uzasadnij, że wówczas a i b są potęgą tego samego elementu $c \in F$. Wskazówka: skorzystaj z tego, że podgrupy grupy wolnej są wolne.