Zadania z Kombinatorycznej Teorii Grup
Lista 2
Lemat o ping-pongu, paradoks Banacha–Tarskiego i reprezentacja Magnusa.

Zastosowania lematu o ping-pongu

1. Sformułuj i uzasadnij wersję lematu o ping-pongu dla trzech elementów grupy.
2. Uzasadnij, że następujące przekształcenia a i b z grupy $GL(2, R)$, gdy parametr d jest dostatecznie duży, generują grupę wolną: $a = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = tat^{-1}$, gdzie t jest obrotem o $\pi/4$ względem początku układu. Wskazówka: skorzystaj z tego że przekształcenia a i b są powinowactwami prostokątnymi względem osi przecinających się pod kątem $\pi/4$ i przeprowadź rozumowanie geometryczne.
3. **(Grupy Schottky)** Grupa G działa przez bijekcje na zbiorze X, zaś Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 są parami rozłącznymi podzbiorami X. Niech a, b będą takimi elementami grupy G, że
   (1) a przekształca dopełnienie Y_1 w Y_2,
   (2) b przekształca dopełnienie Y_3 w Y_4.
   Uzasadnij, że podgrupa generowana przez $\{a, b\}$ jest wolna względem tego zbioru. Wskazówka: najpierw uzasadnij, że a^{-1} przekształca dopełnienie Y_2 w Y_1, a następnie skorzystaj w odpowiedni sposób z lematu o ping-pongu.
4. **(Osiowe automorfizmy drzew)** Automorfizm γ drzewa T nazywamy *osiowym* jeśli istnieje dwustronnie nieskończona łamana $A \subset T$ (zwana osią γ) zachowywana przez γ i taka, że γ działa na A "przesuwając" całą łamaną o pewną liczbę segmentów w jedną ze stron (tą liczbę segmentów nazywamy *stałą przemieszczenia* i oznaczamy $d(\gamma)$).
   (a) Uzasadnij, że dwa automorfizmy osiowe drzewa T o rozłącznych osiach generują grupę wolną.
   (b) Nie ch γ, δ będą osiowymi automorfizmami pewnego drzewa T i załóżmy, że część wspólna ich osi jest ograniczoną łamaną długości l. Uzasadnij, że jeśli stałe przemieszczenia spełniają nierówności $d(\gamma) > l$ i $d(\delta) > l$, to γ i δ wyznaczają podgrupę wolną w grupie automorfizmów drzewa T.

W stronę paradoksu Banacha–Tarskiego

5. **(Zanurzenie F_2 w $SO(3)$)** Niech $\theta = \arccos(1/3)$. Uzasadnij, że obroty A i B o kąt θ wokół osi Oz i Ox, odpowiednio, generują podgrupę wolną rangi 2 w grupie $SO(3)$. Wskazówki: (1) Dowolny element w grupie wolnej $F_{\{a,b\}}$, z dokładnością do sprzężenia, jest reprezentowany zredukowanym słowem kończącym się na a. (2) Indukcją po długości słowa wykaż, że jeśli obroty A, B wyrazimy odpowiednimi macierzami 3×3, to dla dowolnego zredukowanego słowa w nad alfabetem $\{A, B, A^{-1}, B^{-1}\}$, kończącego się na A i mającego długość n, odpowiadająca mu macierz z $SO(3)$ ma pierwszą kolumnę postaci $\frac{1}{3^n} \cdot (a, b\sqrt{2}, c)^T$, gdzie a, b, c są całkowite oraz b jest niepodzielne przez 3 (w szczególności, $b \neq 0$).
6. **(Paradoksalny rozkład grupy wolnej)** Znajdź rozbicie grupy wolnej rangi 2 na cztery podzbiory, $F_2 = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$, takie, że pewne lewostronne grupowe przesunięcia zbiorów A i B (i analogicznie C i D) także dają rozbicia grupy F_2. Dokładniej, istnieją elementy $g, h \in F_2$ takie, że następujące dwie sumy są rozbiciami: $F_2 = A \sqcup gB = C \sqcup hD$.

Kilka przygotowań niezwiązanych z grupami wolnymi.

Zbiory X, Y nazywamy *kawałkami przystającymi* jeśli posiadają skończone rozbicia na tą samą liczbę części, $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ oraz $Y = Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_n$, takie że dla każdego i części X_i oraz Y_i są przystające.

Ćwiczenie 1. Kawałkami przystawanie jest relacją równoważności.
Ćwiczenie 2. Okrąg S^1 na płaszczyźnie jest kawałakami przystający z okręgiem bez punktu $S^1 \setminus \{p\}$.
Ćwiczenie 3. [do zrobienia metodą podobną jak Ćwiczenie 2] Sfera S^2 w przestrzeni jest kawałkami przystająca z dopełnieniem $S^2 \setminus C$ swojego dowolnego przeliczalnego podzbioru C.

7. **(Paradoksalny rozkład sfery S^2)** Uzasadnij, że sfera S^2 oraz suma jej dwóch rozłącznych kopii $S^2 \sqcup S^2$ są kawałkami przystające.
   Wskazówki: (1) Niech C będzie zbiorem wszystkich punktów przecięcia sfery S^2 o środku w początku układu z osiami obrotów nietrywialnych elementów grupy $F_{\{A,B\}}$ z zadania 5; wówczas na dopełnieniu $S^2 \setminus C$ grupa $F_{\{A,B\}}$ działa w sposób wolny, tzn orbity są w 1–1 odpowiedniości z grupą. (2) Paradoksalny rozkład grupy wolnej z zadania 6 implikuje kawałkami przystawanie $S^2 \setminus C$ z dwoma kopiami $S^2 \setminus C$.

Reprezentacja Magnusa i jej konsekwencje

Niech Q_S będzie pierścieniem formalnych szeregów potęgowych względem nieprzemiennych zmiennych $\xi_s : s \in S$, o współczynnikach całkowitych, i niech U_S będzie multyplikatywną grupą jednostek (czyli elementów odwracalnych) w tym pierścieniu. Rozważmy odwzorowanie $\psi : S \to U_S$ zadane przez przyporządkowania $s \mapsto 1 + \xi_s$ dla wszystkich $s \in S$.

8. Uzasadnij, że odwzorowanie $\bar{\psi} : F_S \to U_S$ przedłużające ψ jesdt monomorfizmem (równoważnie, zbiór $1 + \xi_s : s \in S$ jest bazą wolnej podgrupy w grupie U_S).

Rozważmy ideał $\Delta := (\xi_s : s \in S) \subset Q_S$, czyli ideał generowany przez wszystkie jednomiany ξ_s. Dla dowolnego naturalnego n rozważmy potęgę Δ^n ideału Δ, czyli ideał składający się ze wszystkich szeregów, w których współczynniki przy jednomianach stopnia mniejszego niż n zerują się. Rozważmy też *dolny ciąg centralny* grupy F_S, czyli ciąg podgrup normalnych $F_S^{(k)} \lhd F_S$ zadanych rekurencyjnie przez: $F_S^{(1)} = F_S$, $F_S^{(k+1)} = [F_S^{(k)}, F_S]$.

9. Uzasadnij, że dla komutanta $F_S^{(2)}$ grupy F_S zachodzi $\bar{\psi}(F_S^{(2)}) = \bar{\psi}(F_S) \cap [1 + \Delta^2]$.
10. Uzasadnij, że dla każdego naturalnego n zachodzi $\bar{\psi}(F_S^{(n)}) \subset 1 + \Delta^n$. Wywnioskuj, że $\bigcap_n F_S^{(n)} = \{1\}$.
11. **(Rezydualna nilpotentność grupy wolnej)** Uzasadnij, że grupa wolna nieabelowa F_S nie jest nilpotentna (równoważnie, dla każdego n grupa $F_S^{(n)}$ jest nietrywialna). Pokaż też że F_S jest *rezydualnie nilpotentna*, tzn. że dla każdego $g \in F_S \setminus \{1\}$ istnieje grupa nilpotentna P i homomorfizm $h : F_S \to P$ odwzorowujący g w nietrywialny element $h(g) \neq 1$ w P.