Zadania z Kombinatorycznej Teorii Grup
Lista 4. Produkty wolne.

Podstawowe proste własności produktów wolnych

1. Produkt wolny nie mniej niż dwóch nietrywialnych grup zawiera elementy nieskończonego rzędu.
2. Grupy G_α w naturalny sposób zanurzają się jako podgrupy w produkcie wolnym $*_\alpha G_\alpha$, zaś przekrój dowolnych dwóch takich podgrup jest trywialny. Udowodnij to dwoma metodami: (1) korzystając wyłacznie z uniwersalnościowej definicji produktu wolnego (lub jego kanonicznej prezentacji), (2) korzystając z jawnego opisu elementów grupy w postaci normalnej (zredukowanej).
3. Grupa wolna rangi k jest produktem wolnym k-elementowej rodziny nieskończonych grup cyklicznych.
4. Produkt wolny grup jest grupą wolną wtedy i tylko wtedy gdy produktowane grupy są wolne.
5. Dana jest kolekcja podgrup $H_i < G_{\alpha_i} < *_\alpha G_\alpha$ taka, że $\alpha_i \neq \alpha_j$ dla $i \neq j$. Uzasadnij, że podgrupa $H < *_\alpha G_\alpha$ generowana przez $\cup_i H_i$ jest kanonicznie izomorficzna z produktem wolnym $*_i H_i$.
6. Sformułuj i uzasadnij warunek pozwalający rozstrzygać, czy grupa G z dwoma podgrupami H, K jest kanonicznie izomorficzna z produktem wolnym $H * K$.
7. Niech Γ będzie grupą izometrii prostej generowaną przez dwa odbicia (względem dwóch różnych punktów). Uzasadnij, że Γ jest izomorficzna z produktem wolnym dwóch kopii Z_2.
8. Uzasadnij, że grupa będąca produktem wolnym rodziny złożonej z więcej niż dwóch nietrywialnych grup jest izomorficzna z produktem wolnym dokładnie dwóch nietrywialnych grup.

Dalsze nieco trudniejsze własności produktów wolnych

9. Produkt wolny nie mniej niż dwóch nietrywialnych grup ma trywialne centrum.
10. Zbadaj problem sprzężoności w produkcie wolnym. Zastosuj odpowiednio zaadaptowane pojęcie cyklicznego zredukowania.
11. Posługując się kryterium sprzężoności wyprowadzonym w poprzednim zadaniu uzasadnij, że każdy element skończonego rzędu w produkcie wolnym jest sprzężony z pewnym elementem skończonego rzędu w jednej z grup składowych (a nawet, w dokładnie jednej z tych grup).
12. Uzasadnij, że grupy $Z_2 * Z_2$, $Z_2 * Z_2 * Z_2$ oraz $Z * Z_2$ są parami nieizomorficzne.
13. Posługując się np. poniższymi podpunktami uzasadnij, że produkt wolny dwóch nietrywialnych grup nie jest nigdy izomorficzny z produktem prostym dwóch nietrywialnych grup.
    (1) Niech $g \in G \setminus \{1\}$, $h \in H \setminus \{1\}$. Uzasadnij, że centralizator elementu gh w grupie $G * H$ (czyli podgrupa złożona z wszystkich elementów komutujących z gh) jest izomorficzny z nieskończoną grupą cykliczną Z.
    (b) Centralizator dowolnego elementu z produktu dwóch nietrywialnych grup $G \oplus H$ jest produktem dwóch nietrywialnych grup.

14. Uzasadnij, że produkt wolny dwóch nietrywialnych grup, z których przynajmniej jedna jest różna od Z_2, zawiera grupę wolną rangi 2 jako podgrupę.

Pewne zastosowanie produktów wolnych

15. Niech U będzie grupą skończenie prezentowalną, w której nierozstrzygalny jest problem słów. Posługując się grupą U, oraz operacją produktu wolnego, skonstruuj grupę skończenie prezentowalną, w której nierozstrzygalny jest problem:
    (a) przynależności elementu $g \in G$ (wyrażonego poprzez generatory) do centrum grupy G;
    (b) komutowania dowolnego elementu $g \in G$ z ustalonym elementem $g_0 \in G$;
    (c) czy element $g \in G$ jest n-tą potęgą w grupie G, dla ustalonego $n > 1$;
    (d) posiadania przez element $g \in G$ skończonej klasy sporzężoności;
    (e) czy element $g \in G$ ma skończony rząd > 1;
    (f) czy element $g \in G$ jest komutatorem w G.