Zadania z Kombinatorycznej Teorii Grup
Lista 5. Produkty wolne z amalgamcją.

Produkt wolny z amalgamacją, postacie normalne, własności uniwersalne, itp.

1. W produkcie wolnym z amalgamacją $G = \langle c, d \,|\, c^2 = d^3 \rangle$ grup $H = \langle c \,|\, \emptyset \rangle$ oraz $K = \langle d \,|\, \emptyset \rangle$ względem podgrup $A = \langle c^2 \rangle$, $B = \langle d^3 \rangle$ i izomorfizmu $\varphi : A \to B$, $\varphi(c^2) = d^3$ rozważmy zbiory reprezentantów warstw A w H, $Y = \{1, c\}$, oraz B w K, $Z = \{1, d, d^{-1}\}$. Wyznacz formy normalne elementów $c^3 d^{-2} c^{-4} d^4$ oraz $c^{-3} d c^{-4} d^2 c d^2$.
2. Pokaż, że grupa $B = \langle x, y \,|\, xyx = yxy \rangle$ może być wyrażona, dla odpowiedniego doboru podgrup, jako produkt wolny z amalgamacją $Z *_Z Z$.
3. Wyznacz centrum grupy $G = \langle c, d \,|\, c^2 = d^3 \rangle$. A jak wygląda centrum dowolnego produktu wolnego z amalgamacją?
4. Zdefiniuj odpowiedni wariant pojęcia *słowa naprzemiennego cyklicznie zredukowanego* dla produktów z amalgamacją i pokaż, że każdy element produktu jest sprzężony z elementem reprezentowanym takim słowem.
5. Uzasadnij, że w produkcie wolnym z amalgamacją każdy element skończonego rzędu jest sprzężony z elementem z którejś spośród grup składowych. (Stąd wynika, że podukt a amalgamacją grup bezorsyjnych jest grupą beztorsyjną.)
6. Grupa dyhedralna $D_4 = \langle a, b \,|\, a^2, .b^2, (ab)^4 \rangle$ posiada dwie różne podgrupy rzędu 2, z dokładnością do sprzężenia. Oznacza to, że potencjalnie istnieją 3 różne produkty wolne a amalgamacją $D_4 *_{Z_2} D_4$. Uzasadnij, że te trzy grupy są parami nieizomorficzne.
7. Uzasadnij, że dowolne 3 spośród generatorów grupy powierzchni $\langle a, b, c, d \,|\, [a, b][c, d] \rangle$ stanowią bazę generowanej przez siebie podgrupy wolnej.
8. Niech $\varphi : G \to H *_A K$ będzie epimorfizmem (surjekcją). Uzasadnij, że wtedy
$$G = \varphi^{-1}(H) *_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^{-1}(K).$$
9. Niech $\Gamma = G *_K H$ i załóżmy, że K jest podgrupą normalną zarówno w G jak i w H.
   (a) Uzasadnij, że K jest podgrupą normalną w Γ.
   (b) Uzasadnij, że grupa ilorazowa Γ/K jest kanonicznie izomorficzna z produktem wolnym $(G/K) * (H/K)$.
10. Niech $G = H *_{\varphi: A \to B} K$, niech A_0 będzie właściwą podgrupą w A i niech $B_0 = \varphi(A_0)$. Oznaczmy przez $\varphi_0 : A_0 \to B_0$ izomorfizm będący obcięciem φ, i rozważmy grupę $G_0 = H *_{\varphi_0 : A_0 \to B_0} K$.
   (1) Uzasadnij, że odwzorowanie $H \cup_{\varphi_0} K \to H \cup_\varphi K$ indukowane przez identyczność na sumie $H \cup K$ przedłuża się do homomorfizmu $h : G_0 \to G$.
   (2) Uzasadnij, że h nie jest izomorfizmem.
11. Uzasadnij, że produkt wolny z amalgamacją $H *_M K$ skończenie prezentowalnych grup H, K jest skończenie prezentowalny wtedy i tylko wtedy gdy podgrupa amalgamowania M jest skończenie generowalna. Wskazówka: poprzednie zadanie może być pomocne.

Lemat o ping-pongu

12. Uzasadnij, że podgrupa w $SL(2, Z)$ generowana przez elementy $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ jest izomorficzna z produktem wolnym $Z * Z_2$.
13. Znajdź w grupie $SL(2, Z)$ podgrupę izomorficzna z $Z_4 *_{Z_2} Z_4$.

14. W grupie $SL(3, Z)$ dane są podgrupy

$$G_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \text{ parzyste}\}, \quad G_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \text{ parzyste}\}.$$

(1) Sprawdź, że $G_1 \cap G_2 \cong Z^2$.

(2) Udowodnij, że zbiór $G_1 \cup G_2$ generuje w $SL(3, Z)$ podgrupę izomorficzną z produktem wolnym z amalgamacją $G_1 *_{Z^2} G_2$. Wskazówka: podgrupy G_1 i G_2 zachowują podprzestrzeń $V_1 < R^3$ rozpiętą na pierwszym wersorze; rozważ ich działanie indukowane na ilorazie $R^3/V_1 \cong R^2$.