II. 2-kompleksy i ich grupy krawędziowe

Def. 2-kompleks C składa się z

- grafu C^1 zwanego 1-szkieletem C, oraz
- zbioru F_C zorientowanych 2-komórek występujących w parach $\{D, D^{-1}\}$ [zwanych geometrycznymi 2-komórkami]
- funkcji ∂ przyporządkowującej każdej 2-komórce $D \in F_C$ cyklicznie zredukowaną drogę zamkniętą (pętlę) w C^1 w taki sposób, że $\partial(D^{-1}) = (\partial D)^{-1}$ – odwrotne słowo cyklicznie zredukowane

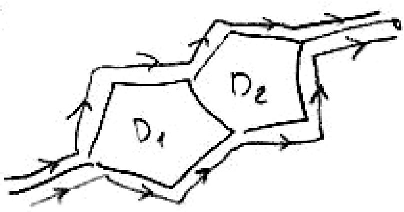
UWAGA. Każdy graf X jest 2-kompleksem, z $F_X = \emptyset$.

* Droga [pętla] w 2-kompleksie C to droga [pętla] w C^1.

2-RÓWNOWAŻNOŚĆ / KOMBINATORYCZNA HOMOTOPIJNOŚĆ DRÓG W 2-KOMLEKSACH

DEF. Drogi p_1, p_2 w 2-kompleksie C są 2-równoważne ($p_1 \sim p_2$) jeśli p_2 powstaje z p_1 za pomocą skończonego ciągu operacji wstawienia lub usunięcia: pary ee^{-1} dla pewnego $e \in E_C$ lub pewnej drogi brzegowej ∂D dla pewnego $D \in F_C$ [początek = koniec w dowolnym wierzchołku cyklu]

PRZYKŁAD



2-równoważne drogi (uzasadnić dokładnie)

- **WŁASNOŚCI 2-równoważności**
  - analogiczne jak 1-równoważności
    - że rel. równoważności
    - że początek i koniec dobrze określone dla klasy
    - że w każdej klasie jest droga zredukowana (ale niekoniecznie jedyna)

- $\Pi(C,v)$ – pętle w C (czyli w C^1) zaczepione w wierzchołku v

- $\Pi(C,v)/\sim$ grupa krawędziowa OZN $\pi(C,v)$

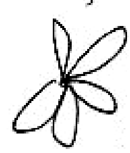
- C jest spójny gdy C^1 spójny

- dla spójnego C grupa $\pi(C,v)$ nie zależy (z dokł. do izomorfizmu) od wyboru wierzchołka v.

KOMPLEKS PREZENTACYJNY $K(S,R)$

Dla grupy (prezentacji) $G = \langle S \mid R \rangle$ gdzie R jest zbiorem cyklicznie zredukowanych relacji (co nie zmniejsza ogólności)

$K(S,R)$ to 2-kompleks z jedynym wierzchołkiem v_0;

o 1-szkielecie $\cong$ 

- [po jednej krawędzi zorientowanej $\tilde{s}$ od v_0 do v_0 (oraz odwrotnej $\tilde{s}^{-1}$) dla każdego $s \in S$] ;

dla każdej relacji $r \in R$

bierzemy 2-komórkę D (oraz odwrotną D^{-1}) t.że $\partial D = r$.

LEMAT. Jeśli $G = \langle S \mid R \rangle$, zaś $K = K(S,R)$ jest kompleksem prezentacyjnym, to $\pi(K, v_0) \cong G$.

Dowód LEMATU:

Niech $\Phi : F_S \to \pi(K, v_0)$ – homomorfizm zadany przez

$F_S \ni s \longmapsto [\tilde{s}] \in \pi(K, v_0)$.

- Φ jest surjekcją, bo każda pętla w K jest konkatenacją pętli $\tilde{s}, \tilde{s}^{-1} : s \in S$.

- Dla każdego $r \in R$, traktując r jako drogę w $K = K(S, R)$, mamy $r \sim 1_{v_0}$, czyli $[r] = 1 \in \pi(K, v_0)$.

  Zatem traktując r jako element z F_S mamy $r \in \operatorname{Ker} \Phi$.

  Stąd $N_R \subset \operatorname{Ker} \Phi$.

- Z drugiej strony, niech $g \in \operatorname{Ker} \Phi$, czyli $\Phi(g) = 1 \in \pi(K, v_0)$. Oznacza to że traktując g jako słowo nad $S \cup S^{-1}$, a następnie jako pętlę w K, mamy $g \sim 1_{v_0}$.

  Operacje wstawienia/usunięcia ee^{-1} nie zmieniają g jako elementu z F_S. Wstawienie/usunięcie pętli ∂D odpowiada domnożeniu o element z N_R, ewentualnie poprzedzonemu przez sprzężenie, i uzupełnionemu sprzężeniem, więc pozostawia element z N_R dalej w N_R.

  Stąd $g \in N_R$, czyli $\operatorname{Ker} \Phi \subset N_R$.

- Surjektywność Φ + $\ker \Phi = N_R \Rightarrow \pi(K, v_0) \cong F_S / N_R = G$. $\square$

GRUPA PODSTAWOWA DOWOLNEGO SPÓJNEGO 2-KOMPLEKSU. 13''
[sposób wyliczenia]

C 2-kompleks, $T \subset C^1$ drzewo maksymalne, Σ - zbiór po jednej zorientowanej krawędzi na każdą geometryczną krawędź poza T,

$$S = \Big\{ \underbrace{[\overline{v\, i(e)}\; e\; \overline{t(e)\, v}]}_{=\bar{e}} : e \in \Sigma \Big\}$$

PRZYPOMNIJMY: $\pi(C^1, v) \cong F_S$

Dla 2-komórki $D \in F_C$ rozważmy słowo v_D nad $S \cup S^{-1}$ zdefiniowane przez ciąg pojawiających się w ∂D zorientowanych krawędzi spoza T:

- jeśli $\partial D = e_1 \cdots e_m$,

  zaś $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ to kolejne krawędzie spoza T wzięte z $e_1, \dots, e_m$

  to $v_D = \bar{e}_{i_1} \cdots \bar{e}_{i_k}$ $\in F_S$ [lub słowo nad $S \cup S^{-1}$] [cykliczna zmiana ∂D powoduje cykliczne przestawienie w v_D, więc nie zmienia klasy sprzężoności v_D w F_S]

Tym samym v_D oznacza element w F_S (określony jednoznacznie z dokładnością do sprzężenia).

Niech Δ - zbiór po jednej zorientowanej 2-komórce na każdą geometryczną 2-komórkę w C

$$R = \{ v_D : D \in \Delta \}$$

N_R = dzielnik normalny w F_S generowany przez R

LEMAT. $\pi(C, v) \cong \langle S \mid R \rangle$. Dokładniej, włożenie $i : C^1 \to C$ determinuje surjekcję $i_* : \underset{F_S}{\underset{\parallel\wr}{\pi(C^1, v)}} \to \pi(C, v)$, której jądrem jest $\ker i_* = N_R$.

dla $\gamma \in \Pi(C,v) = \Pi(C^1,v)$ 13'''

Dowód Lematu:

$i_* : \pi(C^1,v) \to \pi(C,v)$, $\underset{\pi(C^1,v)}{\overset{\cap}{[\gamma]_{C^1}}} \xrightarrow{i_*} \underset{\pi(C,v)}{\overset{\cap}{[\gamma]_C}}$ (bo $i_\#(\gamma) = \gamma$)

* i_* oczywiście jest surjekcją (bo $i_\# : \Pi(C^1,v) \to \Pi(C,v)$ jest bijekcją)
* Pokażmy że $r_D \in \ker(i_*)$ dla każdego $D \in \Delta$

[Stąd wynika, że $N_R \subset \ker(i_*)$]

Niech $p = i(e_1) = t(e_m)$ – początek i koniec wybranej pętli brzegowej $e_1 \dots e_m$ dla komórki D

Rozważmy pętlę $\gamma = \overline{vp}\, \partial D\, \overline{pv} = \overline{vp}\, e_1 \cdots e_m\, \overline{pv}$.

- W C^1 mamy homotopię

$$\gamma \overset{1}{\sim} \underbrace{\overline{v\, i(e_1)}\, e_1\, \overline{t(e_1) v}}\, \underbrace{\overline{v\, i(e_2)}\, e_2\, \overline{t(e_2) v}} \cdots \underbrace{\overline{v\, i(e_m)}\, e_m\, \overline{t(e_m) v}}$$

$$= \tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}_m$$

Jeśli $e_i \subset T$, to $\tilde{e}_i = \overline{v\, i(e_i)}\, e_i\, \overline{t(e_i) v} \overset{1}{\sim} 1_v$

Stąd $\gamma \overset{1}{\sim} \tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_m \overset{1}{\sim} \tilde{e}_{i_1} \cdots \tilde{e}_{i_k}$,

czyli $[\gamma]_{C^1} = \overline{e_{i_1}} \cdots \overline{e_{i_k}} = r_D \in \pi(C^1,v)$

- Z drugiej strony w C mamy

$$\gamma = \overline{vp}\, \partial D\, \overline{pv} \overset{2}{\sim} \overline{vp}\, \overline{pv} \overset{2}{\sim} 1_v$$

czyli $[\gamma]_C = 1 \in \pi(C,v)$.

- Mamy też $i_*(r_D) = i_*([\gamma]_{C^1}) = [\gamma]_C = 1$

więc $r_D \in \ker(i_*)$.

$\Box_C$

Dowód inkluzji $Ker(i_*) \subset N_R$.

Niech $g \in Ker(i_*)$, $g = [\gamma]_{C^1}$, γ - pętla w (C^1, v)

Ponieważ $i_*(g) = i_*([\gamma]_{C^1}) = [\gamma]_C = 1$, więc $\gamma \overset{2}{\sim} 1_v$

Zatem γ powstaje z 1_v przez skończony ciąg operacji wstawienia/skreślenia ee^{-1} lub ∂D, tworząc ciąg pętli

$$1_v = \gamma_0 \rightsquigarrow \gamma_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \gamma_n = \gamma .$$

Pokażę, że jeśli $[\gamma_i]_{C^1} \in N_R$ to $[\gamma_{i+1}]_{C^1} \in N_R$

(indukcja z użyciem tego kroku pokaże, że $[\gamma]_{C^1} \in N_R$, czyli $g \in N_R$).

- Dla wstawienia/skreślenia ee^{-1} to oczywiste bo wtedy

$$\gamma_i \overset{1}{\sim} \gamma_{i+1}, \text{ czyli } [\gamma_i]_{C^1} = [\gamma_{i+1}]_{C^1} .$$

- Dla wstawienia ∂D

przyjmijmy, że $\gamma_i = \alpha\beta$, $\gamma_{i+1} = \alpha \partial D \beta$. Wówczas

$$\gamma_{i+1} = \alpha\partial D\beta \overset{1}{\sim} \alpha\beta\beta^{-1}\partial D\beta \overset{1}{\sim} (\alpha\beta)\, \beta^{-1}\overline{pv}\,\overline{vp}\,\partial D\,\overline{pv}\,\overline{vp}\,\beta =$$

$$= (\alpha\beta)(\overline{vp}\beta)^{-1}(\overline{vp}\,\partial D\,\overline{pv})(\overline{vp}\beta)$$

Stąd $[\gamma_{i+1}]_{C^1} = \underset{\overset{\cap}{N_R}}{[\gamma_i]_{C^1}} \underbrace{h^{-1} v_D h}_{\overset{\cap}{N_R}} \in N_R$ $\square$

WNIOSEK. Niech $\bigvee_i (C_i, v_i)$ będzie bukietem rodziny 2-kompleksów, i niech v_0 oznacza wierzchołek w bukiecie uzyskany ze sklejenia wierzchołków v_i. Wówczas

$$\pi\left(\bigvee_i (C_i, v_i), v_0\right) \cong \mathop{\ast}_i \pi(C_i, v_i) .$$

Dowód wniosku

Niech T_i drzewo rozpinające w C_i^1, oraz niech

$\pi(C_i, v_i) = \langle S_i \mid R_i \rangle$ gdzie S_i to generatory odpowiadające krawędziom C_i^1 spoza T_i

R_i to relacje odp. 2-komórkom w C_i

Biorąc $T = \bigvee_i T_i$ dostajemy drzewo rozpinające w $\bigvee_i (C_i, v_i)$

i wszystkie niego mamy $S = \dot\bigcup S_i$

$R = \dot\bigcup R_i$. Stąd teza. $\square$

<u>Def.</u> Morfizm $f: C_1 \to C_2$ 2-kompleksów

to morfizm ich 1-szkieletów, $f^1: C_1^1 \to C_2^1$, uzupełniony o odwzorowanie $F_{C_1} \xrightarrow{f^{[2]}} F_{C_2}$ respektujące brzegi i odwracanie komórek, tzn

- $f^{[2]}(D^{-1}) = \left[f^{[2]}(D)\right]^{-1}$
- $\partial\left[f^{[2]}(D)\right] = f^1_\#(\partial D)$ — jako cykliczne drogi zamknięte.

FAKT. Każdy morfizm $f: C_1 \to C_2$, poprzez indukowane odwzorowanie pętli $f_\# \, \Pi(C_1, v) \to \Pi(C_2, f(v))$, determinuje homomorfizm $f_* \, \pi(C_1, v) \to \pi(C_2, f(v))$.

[W szczególności, jeśli $p_1 \sim p_2$ to $f_\# p_1 \sim f_\# p_2$] □

<u>Def.</u> Morfizm $f: C_1 \to C_2$ jest <u>nakryciem</u> jeśli $f^1: C_1^1 \to C_2^1$ jest nakryciem, a ponadto

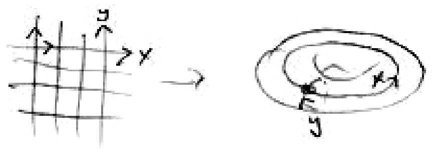
- $\forall v \in V_{C_2}$ $\forall v' \in f^{-1}(v)$ f zadaje bijekcję

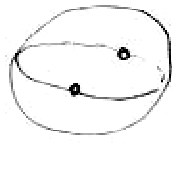
$$\left\{\begin{matrix}\text{2-komórki w } C_1 \\ \text{przyległe do } v'\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{2-komórki w } C_2 \\ \text{przyległe do } v\end{matrix}\right\}$$

(2-komórki przyległe do wierzchołka rozpatrujemy z „krotnościami" gdy ∂D przechodzi kilka razy przez wierzchołek)

UWAGA: ma to być nakrycie w topologicznym sensie dla 2-kompleksów rozumianych jako geometryczne zrealizowane.

PRZYKŁADY: $E^2 \to T^2$, $S^2 \to \mathbb{RP}^2$





LEMAT. Homomorfizm $f_*: \pi(C_1, v) \to \pi(C_2, f(v))$ indukowany przez nakrycie $f: C_1 \to C_2$ jest monomorfizmem.

Dowód:

Każda droga p w C_2 o początku w $f(v)$ „podnosi się" do drogi $\tilde{p}$ w C_1 o początku w v [czyli takiej drogi, że $f\#\tilde{p} = p$], i to jednoznacznie (bo f^1 jest nakryciem).

Podobnie, każda kombinatoryczna homotopia dróg p_1, p_2 w C_2 o początku w $f(v)$ „podnosi się" do kombinatorycznej homotopii podniesionych dróg $\tilde{p}_1, \hat{p}_2$ (PATRZ $15\frac{1}{2}$).

Dalej argument taki sam jak w przypadku grafów. □

LEMAT Dla każdej podgrupy $H < \pi(C, v)$ istnieje spójne nakrycie $f: (C', v') \to (C, v)$ t.że. $f_*[\pi(C', v')] = H$.

Dowód: Konstrukcja nakrycia – pomijamy. ■

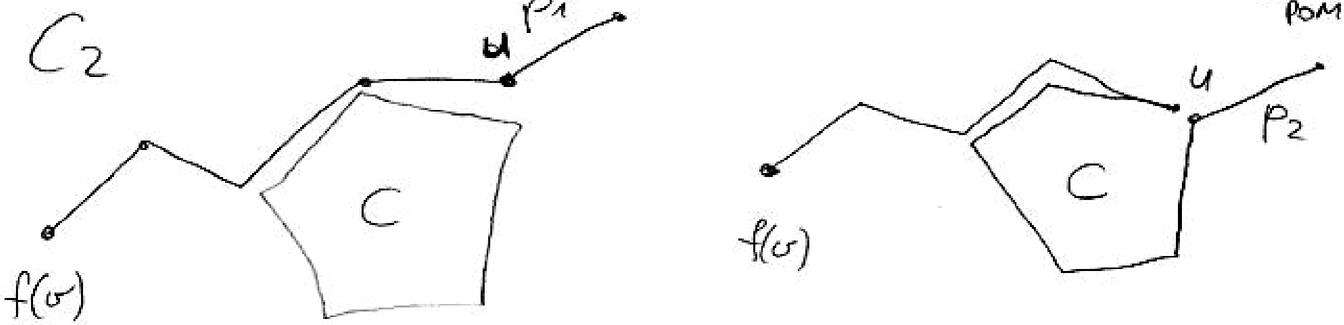
Pozostałe własności nakryć 2-kompleksów takie same jak dla nakryć grafów.

- jednoznaczność spójnego nakrycia 2-kompleksu C odpowiadającego podgrupie $H < \pi(C, v)$ [izomorfizm respektujący odwzorowania nakrywające na C]
- krotność spójnego nakrycia $f: (C_1, v_1) \to (C_2, v_2)$, czyli moc zbioru $f^{-1}(v)$ [która nie zależy od $v \in V_{C_1}$], jest równa indeksowi $[\pi(C_2, v_2) : H]$ podgrupy $H = f_*[\pi(C_1, v_1)]$ odpowiadającej temu nakryciu
- Dla spójnego nakrycia $f: (C_1, v_1) \to (C_2, v_2)$ 2-kompleksów podgrupa $H = f_*[\pi(C_1, v_1)] < \pi(C_2, v_2)$ jest dzielnikiem normalnym $\iff$ grupa $Aut_f(C_1)$ automorfizmów 2-kompleksu C_1 zachowujących f działa tranzytywnie na $f^{-1}(v)$ $\forall v \in V_{C_1}$.

elementarne homotopie podnosi się

$15\frac{1}{2}$ POMOCNICY

C_2



C_1