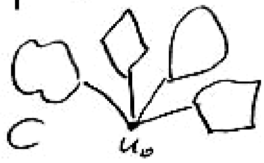
TWIERDZENIE KUROSHA (o podgrupach w produkcie wolnym):

Niech $G = \ast_{i\in I} G_i$. Każda podgrupa $H < G$ jest produktem wolnym pewnej grupy wolnej, oraz podgrup sprzężonych w G z podgrupami składowych grup G_i. Dokładniej, $H = F \ast \left(\ast_{j\in J} H_j\right)$, F-wolna, $\forall_{j\in J}\ \exists_{i_j\in I}\ \exists_{g_j\in G}: g_j^{-1} H_j g_j < G_{i_j} < G$.

Dowód: Niech $G_i = \langle S_i | R_i \rangle$, i niech (K_i, u_i) będzie kompleksem uzyskanym z kompleksu prezentacyjnego $(K(S_i,R_i), v_i)$ przez doklejenie krawędzi: $e_i = (u_i, v_i)$



Mamy oczywiście $\pi(K_i,u_i) = G_i$.

- Rozważmy bukiet $C = \bigvee_{i\in I}(K_i,u_i)$, z wierzchołkiem bazowym u_0.

  Wówczas $\pi(C,u_0) = G = \ast_{i\in I} G_i$.

  Niech $f:(C^H,\tilde{u}_0) \to (C,u_0)$ będzie nakryciem stowarzyszonym z podgrupą H; Wówczas f_* zadaje izomorfizm $\pi(C^H,\tilde{u}_0)$ z H.

- Rozważmy w C^H podkompleksy $C_{i,j}: j\in J_i$ będące składowymi spójnymi przeciwobrazu $f^{-1}(K(S_i,R_i))$ oraz podkompleks $L = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} e_i\right)$.

  Podkompleksy $C_{ij}: i\in I, j\in J_i$ są parami rozłączne w C^H, pooddzielane fragmentami L izomorficznymi z $\bigcup_{i\in I} e_i$.

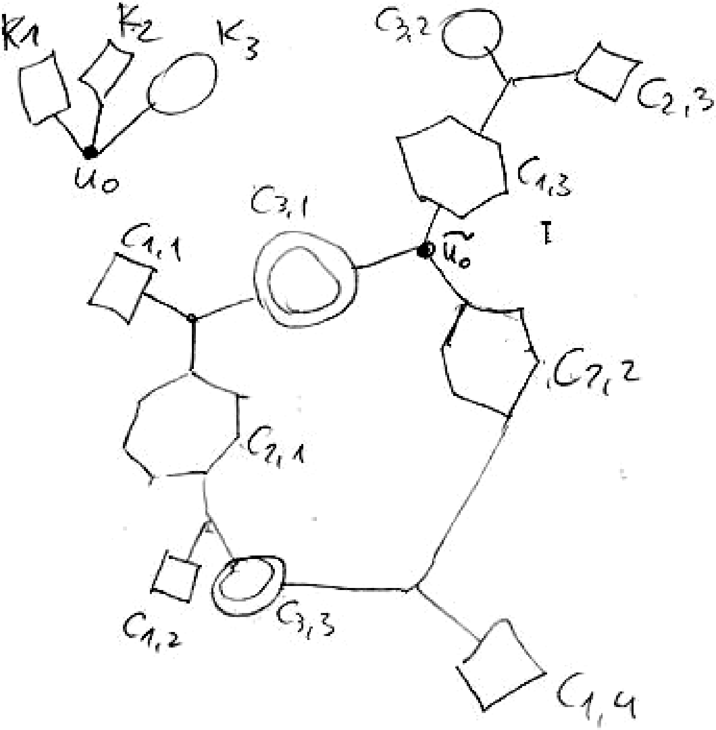
  Ponadto $f_{i,j} := f|C_{ij}: C_{ij} \to K(S_i,R_i)$ jest spójnym nakryciem $\forall i,j$.

VERTE

$\longrightarrow$

RYSUNEK

$C =$



C^1

- Dla każdego $C_{i,j}$ niech $T_{i,j}$ będzie drzewem maksymalnym w $C_{i,j}$.

  Sumę $\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}} T_{i,j}$ uzupełniamy do drzewa maksymalnego T w CH.
  [sumując z częścią L]

- Generatory $\pi(CH, \tilde{u}_0)$ są 1-1 z krawędziami spoza T

  Niech $X_{i,j}$ to generatory odpowiadające krawędziom spoza T zawartym w $C_{i,j}$

  X_L — " — L

- Relacje dla $\pi(CH, \tilde{u}_0)$ zniesione z drzewa T są 1-1 z 2-komórkami w CH. Każda taka 2-komórka D jest zawarta w pewnym $C_{i,j}$, więc odpowiadająca jej relacja r_D jest słowem nad $X_{i,j} \cup X_{i,j}^{-1}$

  Niech $R_{i,j}$ to będzie zbiór relacji dla komórek $D \subset C_{i,j}$.

  Wówczas
$$\pi(CH, \tilde{v}_0) = \Big\langle \bigcup_{i,j} X_{i,j} \cup X_L \;\Big|\; \bigcup_{i,j} R_{i,j} \Big\rangle =$$
$$= F_{X_L} * \Big(\mathop{\ast}_{i,j} \langle X_{i,j} \mid R_{i,j} \rangle \Big)$$

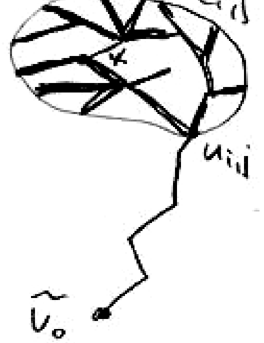
  Jest to szukany rozkład $H = \pi(CH, \tilde{v}_0)$ w produkt wolny.

- Pozostaje bliżej zrozumieć podgrupy $\langle X_{ij} \mid R_{i,j} \rangle$ w $\pi(CH, \tilde{u}_0)$, a ściślej zbadać ich obrazy $f_*(\langle X_{ij} \mid R_{ij} \rangle)$ w H.

  Ustalmy i,j i niech v_{ij} będzie wierzchołkiem w $C_{i,j}$ najbliższym $\tilde{v}_0$ w T

  Każdy generator $x \in X_{ij}$ jest klasą drogi $\gamma = \overline{\tilde{v}_0 v_{ij}}\, \alpha\, \overline{v_{ij} \tilde{v}_0}$,

  gdzie α jest zamkniętą drogą w C_{ij} zaczepioną w v_{ij}.



Mamy $f_*(\alpha) = [f_\#(\gamma)]$ $\quad f_\#(\gamma) = f_\#(\overline{\tilde{v}_0 v_{ij}})\, f_\#(\alpha)\, f_\#(\overline{v_{ij}\tilde{v}_0}) =$

$$= \underbrace{f_\#(\overline{\tilde{v}_0 v_{ij}})(v_{ij} v_0^{ij})}_{\beta\text{- pętla zaczepiona w } v_0} \underbrace{(v_0^{ij} v_{ij})\, f_\#(\alpha)(v_{ij} v_0^{ij})}_{\text{pętla zaczep. w } v_0 \text{ zawarta w } K_i} \underbrace{\overset{(v_0 v_i)}{}\, f_\#(\overline{v_{ij}\tilde{v}_0})}_{\beta^{-1}}$$

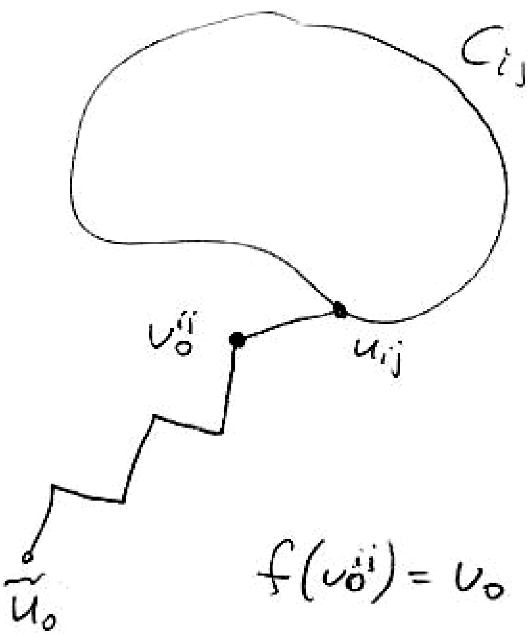
[patrz rysunek poniżej]

Niech $[\beta] = g_j$

Wtedy $f_*(\alpha) = g_j h g_j^{-1}$ dla pewnego $h \in \pi(K_i, v_0) = G_i < G$

a więc $f_*(\langle X_{ij} | R_{ij} \rangle) < g_{ij} G_i g_{ij}^{-1}$

czyli $g_{ij}^{-1}[f_*(\langle X_{ij} | R_{ij} \rangle)] g_{ij} < G_i$ $\square$



$f(v_0^{ij}) = v_0$