METODA (STALLINGSA [1983] —) RDZEŃ GRAFU NAKRYWAJĄCEGO [J. Stallings 1983] 1

• IMMERSJE GRAFÓW VERTE →

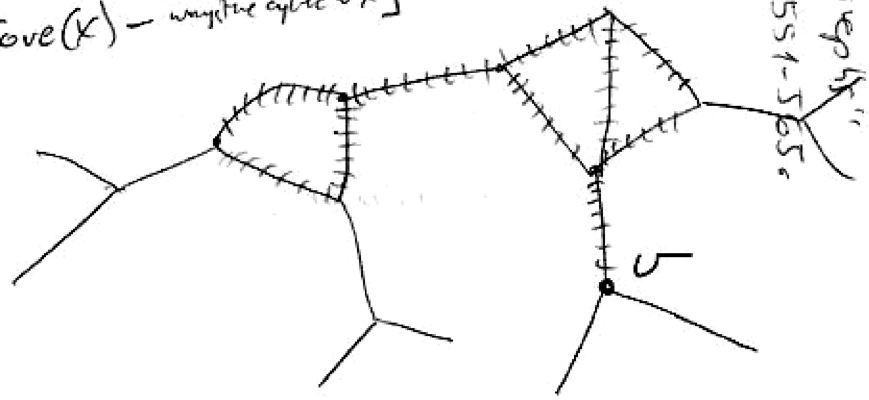
• Rdzeń w grafie (X,v), $Core(X,v)$, to najmniejszy spójny podgraf zawierający v oraz wszystkie cykle w X

(istnieje, bo jak się ~~rozważy~~ w X skolapsuje komponenty podgrafu równego sumie cykli, to dostanie się drzewo; wówczas rdzeń jest przeciwobrazem minimalnego poddrzewa w tym drzewie zawierającego skolapsowane komponenty oraz v).

[WARIANT: $Core(X)$ — wszystkie cykle w X]

Joh. Stallings „Topology of finite graphs", Inventiones Mathematicae 71 (1983), 551–565.

PRZYKŁAD.



WŁASNOŚCI:

(a) • $X = Core(X,v) \cup$ poprzyczepiane korzeniami drzewka

(b) • $Core(X,v)$ zawiera dopełnienie dowolnego drzewa maksymalnego T w X (bo każda krawędź spoza T należy do pewnego cyklu w X)

WNIOSEK. $i_*: \pi(Core(X,v),v) \to \pi(X,v)$ jest izomorfizmem. □

(c) • Dla dowolnego drzewa [max.] T w X, $T' := T \cap Core(X,v)$ jest drzewem [maksymalnym] w $Core(X,v)$.

D-d: T' jest drzewem, bo jest spójne (inaczej $T = T' \cup$ fragmenty poprzyczepianych drzewek nie byłoby spójne); [maksymalność w $Core(X,v)$ wynika np. z faktu zawierania wszystkich wierzchołków]. □

(d) • Drzewa maksymalne T w X mają postać:

drzewo max T' w $Core(X,v) \cup$ całe wszystkie poprzyczepiane drzewka

Def. Morfizm $\phi : Y \to X$ grafów jest immersją

jeśli jest lokalnym włożeniem, tzn

$\forall v \in V_Y$ krawędzie o początku w v są odwzorowane przez ϕ

różnowartościowo w krawędzie o początku w $\phi(v)$.

Przykłady: ① nakrycie ② włożenie (inkluzje) podgrafów w grafy

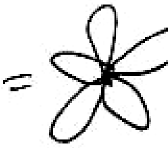
③ obcięcie nakrycia do podgrafu

LEMAT. Gdy $\phi : Y \to X$ jest immersją grafów to

$\forall v \in V_Y \quad \phi_* : \pi(Y, v) \to \pi(X, \phi(v))$ jest monomorfizmem.

D-d: zredukowane pętle w Y przechodzą na

zredukowane pętle w X $\square$

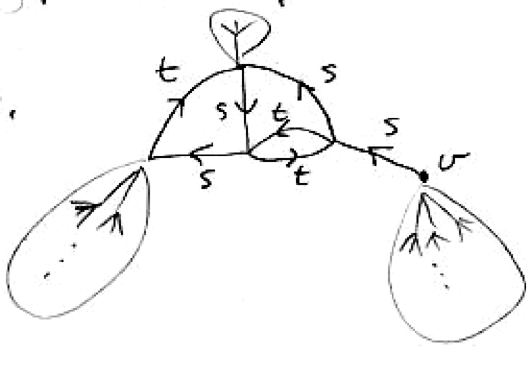
Gdy (X,v) jest spójnym nakryciem grafu $\Gamma_S =$  $[f:(X,v)\to(\Gamma_S,*)]$

(z indeksowanymi krawędziami)

i gdy $H = f_*(\pi(X,v)) < \pi(\Gamma_S,*) = F_S$, to

- (X,v) można jednoznacznie odtworzyć z $\mathrm{Core}(X,v)$ (przez „doczepienie" odpowiednich drzew)

PRZYKŁAD.



- $\mathrm{Core}(X,v)$ zawiera pełną informację o podgrupie H a dokładniej $\longrightarrow$ [$f_*: \pi(\mathrm{Core}(X,v)) \to \pi(\Gamma,*) = F_S$ jest monomorfizmem, i obraz pokrywa się z $H = f_*[\pi(X,v)]$]

[wynika z komutowania
$$\begin{tikzcd} & (X,v) \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Core}(X,v) \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f"] & (\Gamma_S,*) \end{tikzcd}$$
]

AUTOMAT rozpoznający słowa należące do podgrupy H

- Podgrupa H ma rangę skończoną $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Core}(X,v)$ jest skończonym podgrafem w X.

Dowód:

$\Longleftarrow$ Gdy $\mathrm{Core}(X,v)$ skończony, to dopełnienie dowolnego drzewa max w X ma skończenie wiele krawędzi (bo zawiera się w $\mathrm{Core}(X,v)$), a liczba tych krawędzi to ranga H. z własności (b)

$\Longrightarrow$ $H \cong \pi(X,v)$

więc poza drzewem max T pozostaje sk. wiele krawędzi w X.

Wtedy z (e), $\mathrm{Core}(X,v)$ skończony. $\square$

KONSEKWENCJE:

1) [Twierdzenie Schreiera]
Podgrupa normalna skończonej rangi w grupie wolnej F jest albo trywialna, albo jest podgrupą skończonego indeksu. [ZAD.]
(w tym drugim przypadku F musi być skończonej rangi).

2) Def.
Podgrupę H w grupie wolnej F nazywamy wolnym faktorem (free factor) jeśli dla pewnej bazy S grupy F, i pewnego $T \subset S$, zachodzi: $H = \langle T \rangle$ (wtedy oczywiście $H \cong F_T$).

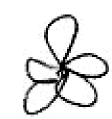
FAKT POMOCNICZY. Jeśli Γ_1 jest podgrafem w Γ_2, $v \in V_{\Gamma_1}$, to $\pi(\Gamma_1, v)$ jest wolnym faktorem w $\pi(\Gamma_2, v)$.

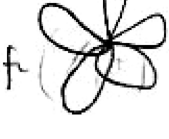
VERTE Dowód Faktu Pomocniczego →

TWIERDZENIE (M. Hall 1949)

Dowolna skończenie generowana podgrupa $H < F$ (F wolna dowolnej rangi) jest wolnym faktorem pewnej podgrupy $G < F$ skończonego indeksu.

(UWAGA. Oczywiście, na ogół H nie jest wolnym faktorem w F !)

Dowód: Niech (X, v) nakrycie  odpowiadające H, i niech $Core(X, v)$ – rdzeń. Skończona generowalność H $\Rightarrow$ $Core(X, v)$ skończony.

Uzupełniamy go do skończonej krotności nakrycia (Y, v') grafu  następująco:

- dla każdego bazowego generatora t grupy F w $Core(X, v)$ mamy parami rozłączne
  - t-cykle (z krawędzi indeksowanych przez t)
  - t-łuki
  - wierzchołki przez które nie przechodzi żaden z t-cykli ani t-łuk [t-ominięte]
- każdy t-łuk uzupełniamy do t-cyklu jedną dodatkową t-krawędzią
- do każdego t-ominiętego wierzchołka dokładamy t-pętlę

VERTE →

Niech G – podgrupa odpowiadająca nakryciu (Y, v') w $F = \pi($$)$
G jest skończonego indeksu w F, bo nakrycie jest skończonej krotności.

Z FAKTU POMOCNICZEGO, H jest wolnym faktorem w G.

Dowód Faktu Pomocniczego: • $i_* : \pi(\Gamma_1, v) \to \pi(\Gamma, v)$ włożenie

- możemy zał. że Γ_1 spójny, przechodząc do komponenty v w Γ_1
- T_1 drzewo rozp. w Γ_1, uzupełniam do T_2 w Γ_2

Standardowe generatory $\pi(\Gamma_1, v)$ [względem T_1] są też standardowymi generatorami $\pi(\Gamma_2, v)$ [względem T_2]. □

D-d Tw Schreiera

$H \lhd F_S$, $f:(X,v) \to \Gamma_S$ nakrycie odp. H

Albo X jest drzewem

$\to$ wtedy $H = f_*(\pi_1(X,v)) = 1$ trywialne

albo $\mathrm{Core}(X,v) = X$

(bo inaczej w X są zarówno wierzchołki leżące na cyklach, jak i nieleżące, sprzeczność z tranzytywnością $\mathrm{Aut}_f X$)

$\to$ wtedy X skończone

więc S skończone oraz $[F_S : H] < \infty$. $\square$

(3) TW [Howson, 1954]

Niech H, K podgrupy skończonej rangi w grupie wolnej F.
Wówczas $H \cap K$ ma skończoną rangę.

UWAGA

- Hipoteza Hanny Neumann [1956]: H, K j.w. nietrywialne, to $rk(H\cap K) \leq [rk(H)-1]\cdot[rk(K)-1]+1$
- Udowodniona przez Igora Mineyev'a – 2011

Hanna Neumann: $rk(H\cap K)-1 \leq 2\cdot[rk(H)-1]\cdot[rk(K)-1]$.

DOWÓD: (Φ) nakrycia grafu $X_S =$  i ich rdzenie, jako automaty rozpoznające słowa z podgrup $H < \Gamma_S = \pi(X_S, *)$. VERTE →

(A) Pull back morfizmów grafów [znany też produkt włóknisty (fibre product)]

$f_i : Y_i \to X$, $i=1,2$, morfizmy grafów

Ich pull-back to graf Z i morfizmy $g_i : Z \to Y_i$

takie że
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & Y_1 \arrow[d, "f_1"] \\ Y_2 \arrow[r, "f_2"] & X \end{tikzcd}$$
komutuje

zdefiniowany następująco:

$$V_Z = \{(v_1, v_2) \in V_{Y_1}\times V_{Y_2} : f_1(v_1) = f_2(v_2)\},$$

$$E_Z = \{(e_1, e_2) \in E_{Y_1}\times E_{Y_2} : f_1(e_1) = f_2(e_2)\},$$

$i(e_1,e_2) = (i(e_1), i(e_2))$, $(e_1,e_2)^{-1} = (e_1^{-1}, e_2^{-1})$.

Odwzorowania $g_i : Z \to Y_i$ to obcięcia odpowiednich rzutowań $V_{Y_1}\times V_{Y_2} \to V_{Y_i}$, $E_{Y_1}\times E_{Y_2} \to E_{Y_i}$

UWAGA [bez dowodu] Pull back (Z, g_1, g_2) jest scharakteryzowany następującą własnością uniwersalności:

dla dowolnego komutującego
$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "g_1'"] \arrow[d, "g_2'"'] & Y_1 \arrow[d, "f_1"] \\ Y_2 \arrow[r, "f_2"] & X \end{tikzcd}$$
$\exists !\ \alpha : Z' \to Z$ t.że
$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[rr, bend left] \arrow[dd, bend right] & & Y_1 \arrow[dd] \\ & Z \arrow[ur] \arrow[dl] & \\ Y_2 \arrow[rr] & & X \end{tikzcd}$$
komutuje.

[ZAD.]

FAKT. Graf etykietowany zbiorem S jest spójnym podgrafem nakrycia (Y,σ') grafu X_S zanurzonym $\mathrm{Cov}(Y,\sigma')$ $\Longleftrightarrow$

jako automat akceptuje słowa opisujące dokładnie podgrupę $H < F_S$ odpowiadającą nakryciu (Y,σ').

- każde akceptowane słowo jest elementem z H
- $\forall h \in H$ automat akceptuje co najmniej jedno słowo reprezentujące h, np. jedyne zredukowane słowo nad $S \cup S^{-1}$ reprezentujące h

(8) Pull back rdzeni nakryć odpowiadających podgrupom H, K.

$F = F_S = \pi($  $)$, $X =$ 

$(Y_H, v_H), (Y_K, v_K)$ – nakrycia odp. podgrupom H, K

(C_H, v_H) (C_K, v_K) – rdzenie tych nakryć

f_H, f_K – obcięcia morfizmów nakrywających $Y_H \to X, Y_K \to X$ do rdzeni

$(Z, g_H : Z \to C_H, g_K : Z \to C_K)$ – pull-back f_H, f_K

$g : Z \to X$ $\quad g = g_H f_H = g_K f_K$

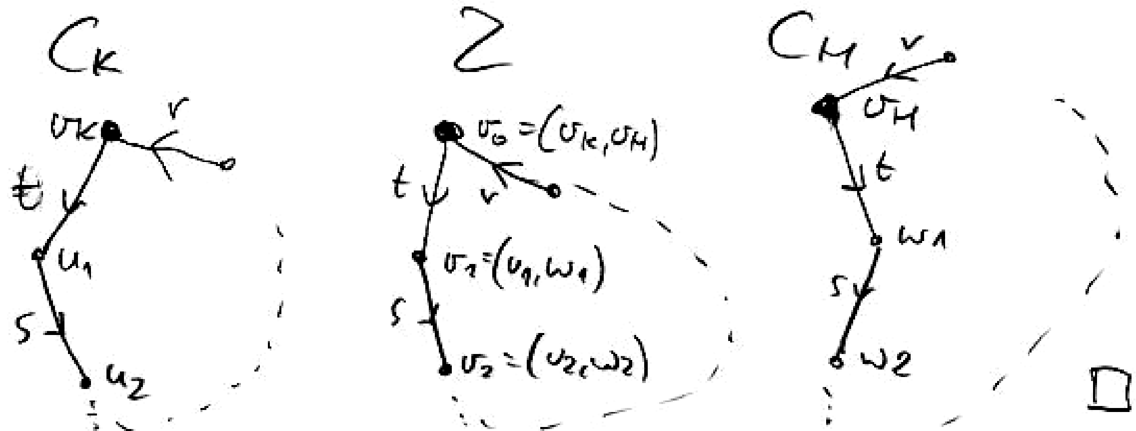
Krawędzie w X, C_H, C_K, Z etykietowane generatorami F

zaś morfizmy zachowują etykiety.

Wierzchołek bazowy w Z : $v_0 = (v_H, v_K)$

LEMAT. Niech $\mathcal{L}_H, \mathcal{L}_K, \mathcal{L}_Z$ to zbiory słów akceptowanych przez (C_H, v_H), (C_K, v_K) i (Z, v_0). Wówczas $\mathcal{L}_Z = \mathcal{L}_H \cap \mathcal{L}_K$.

Dowód: obie inkluzje oczywiste z konstrukcji pullbacku:



$\square$

C) Dowód właściwy

Niech (Y, v_0) będzie uzupełnieniem komponenty Z_0 grafu Z zawierającej v_0 do nakrycia grafu X, za pomocą przyczepiania drzewek,
i niech $\mathcal{L}_Y$ będzie zbiorem słów akceptowanych przez (Y, v_0),
zaś L niech będzie podgrupą odpowiadającą nakryciu (Y, v_0).

- $\mathrm{Core}(Y, v_0) \subset Z_0 \subset Z$
  więc jest skończony, więc $\quad rk(L) < \infty$

- $$\mathcal{L}_H / \text{redukcje} = H < F_S$$
  $$\mathcal{L}_K / \text{redukcje} = K < F_S$$

- $$\mathcal{L}_Y / \text{redukcja} = L < F_S$$
  $$\parallel$$
  $$\mathcal{L}_Z / \text{redukcje}$$

- Zatem, skoro $\mathcal{L}_Z = \mathcal{L}_H \cap \mathcal{L}_K$, mamy $L = H \cap K$,
  skąd skończoność rangi przekroju. $\square$

UWAGA:
równość

$$\mathcal{L}_H \cap \mathcal{L}_K / \hat{\sim} = \mathcal{L}_H / \hat{\sim} \cap \mathcal{L}_K / \hat{\sim}$$

wynika stąd, że w każdej klasie abstrakcji kojarzącej się niepusto z $\mathcal{L}_H, \mathcal{L}_K$ będzie $\mathcal{L}_Z$ siedział
reprezentant zredukowany

4) NIERÓWNOŚĆ HANNY NEUMANN [1956].

Dla nietrywialnych podgrup skończonej rangi $H_1, H_2 < F$

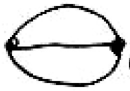
$$rk(H_1 \cap H_2) - 1 \leq 2 \cdot [rk(H_1) - 1] \cdot [rk(H_2) - 1]$$

Dowód Gerstena [1983]:

- można założyć, że $F = F_2$

  (H, K zawierają się w podgrupie

  $F_{\leq \aleph_0} < F$, zaś $F_{\leq \aleph_0} < F_2$).

- Niech $\Delta =$  p i utożsamiamy F_2 z $\pi(\Delta, p)$.

- Rozważmy nakrycia $f_i : (Y_i, v_i) \to (\Delta, p)$ odpowiadające podgrupom H_1, H_2,

  pull-back $(Z, v_0; g_1, g_2)$ odwzorowań f_i, przy czym wszystkie f_i i g_i są immersjami (lokalnymi włożeniami)

- Jeśli $H_1 \cap H_2$ jest nietrywialne,

  Sprzęgnijmy wszystko przez taki element z F_2,

  by każdy wierzchołek v_0 znalazł się w rdzeniu C_Z pull-backu (Z, v_0)

  (wtedy v_1, v_2 znajdują się w rdzeniach C_1, C_2 w Y_1, Y_2)

- Mamy oczywiście komutujący diagram

$$\begin{tikzcd} C_Z \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & C_1 \arrow[d, "f_1"] \\ C_2 \arrow[r, "f_2"] & \Delta \end{tikzcd}$$

(bo obraz rdzenia przez immersję zawiera się w rdzeniu).

- Niech $\varrho(X)$ będzie liczba wierzchołków o walencji 3 w grafie X

W grafach C_2, C_1, C_2 walencje wierzchołków są ≤ 3,

ze względu na postać Δ.

W takich grafach zachodzi:

FAKT. $\varrho(X) = 2 \cdot [\mathrm{rk}(\pi_1(X)) - 1]$.

D-d: ozn. $e(X)$ – liczba geom. krawędzi.

$\mathrm{rk}(\pi(X)) = e(X) - |V_X| + 1$, $\mathrm{rk}(\pi(X)) - 1 = e(X) - |V_X|$

$$e(X) = \frac{2|V_X| + \cancel{3}\varrho(X)}{2} = |V_X| + \frac{\varrho(X)}{2}$$

$$\varrho(X) = 2 \cdot [e(X) - |V_X|] = 2 \cdot [\mathrm{rk}(\pi(X)) - 1] \quad \square$$

- Ponieważ C_2 zawiera się w pull-backu C_1, C_2

mamy nierówność $\varrho(C_2) \leq \varrho(C_1) \cdot \varrho(C_2)$

co wraz z powyższym FAKTEM,

daje nierówność Hanny Neumann. $\square$