TEORIA NIELSENA

- Narzędzie pozwalające „optymalizować" zbiory generatorów podgrup w grupach wolnych.

- Pozwoli uzyskać odpowiedzi m.in. na następujące pytania:

  1. Czy każda podgrupa grupy wolnej jest wolna?
  2. Czy każdy n-elementowy zbiór generatorów grupy F_n jest jej bazą?

     [Def. Bazą grupy wolnej nazywamy dowolny zbiór generatorów S względem którego grupa jest wolna.]
  3. Czy grupa $\mathrm{Aut}(F_n)$ automorfizmów grupy F_n jest skończenie generowana?

① Warunki Nielsena mówią, by układ zredukowanych słów nad $S\cup S^{-1}$ generował w sposób wolny podgrupę w F_S.

DEF. Zbiór U elementów grupy wolnej F nazywamy N-zredukowanym (zredukowanym w sensie Nielsena) jeśli

(N0) $1\notin U$ oraz $U\cap U^{-1}=\emptyset$

(N1) $\forall u,w\in U\cup U^{-1}$, $uw\neq 1$, w iloczynie uw redukuje się co najwyżej połowa każdego ze słów u,w ($|uw|\geq|u|$, $|uw|\geq|w|$, gdzie $|uw|$ oznacza długość zredukowanego słowa reprezentującego element $uw\in F$)
[dopuszczamy $u=w$]

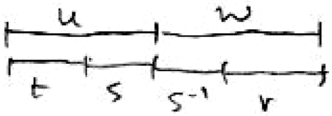
(N2) $\forall u,v,w\in U\cup U^{-1}$, $uv\neq 1$, $vw\neq 1$, zachodzi

$$|uvw|>|u|+|w|-|v|.$$

[dopuszczamy równość $u=v$, $v=w$]

INTERPRETACJE „GRAFICZNE" WARUNKÓW NIELSENA

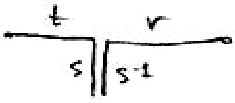
(N1) iloczyn uw



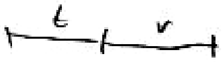
$u = ts \quad w = s^{-1}v$

s – maksymalne j.w.

redukcja (skreślenie)



po zredukowaniu



$uw = tv$

(N1): $|s| \le \frac{1}{2}|u|$ czyli $|s| \le |t|$

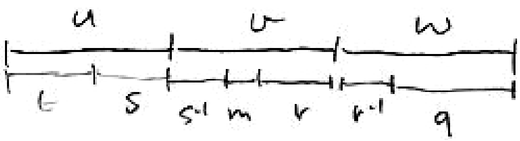
$|s^{-1}| \le \frac{1}{2}|w|$ czyli $|s| \le |v|$

$|s^{-1}| = |s|$

stąd $|uw| = |t| + |v| \geq |t| + |s| = |u|$

$\geq |s| + |v| = |w|$.

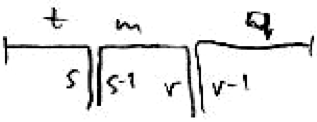
(N0 + N1 + N2):



z N1 $|s^{-1}| \le \frac{1}{2}|v|$, $|r| \le \frac{1}{2}|v|$, więc s^{-1}, r nie zachodzą w v

więc m istnieje, w najgorszym razie pusty

redukcja



$uvw = tmq$

$|uvw| = |t| + |m| + |q| = |u| + |v| + |w| - 2|s| - 2|r| =$

$= |u| + |v| + |w| - 2|v| + 2|m| =$

w obecności N0 i N1

$= |u| + |w| - |v| + 2|m|$

(N3): $|uvw| > |u| + |w| - |v| \iff \underline{|m| > 0}$

N0 + N1 + N2 $\Rightarrow$ przy dokonywaniu redukcji dowolnego uvw j.w. redukuje się co najwyżej połowa słowa v na początku i na końcu, przy czym przynajmniej jedna z tych dwóch redukcji jest mniejsza niż połowa słowa v

Dla $v \in U \cup U^{-1}$ określmy

$\lambda(v)$ - maksymalne początkowe podsłowo słowa v które ulega skreśleniu przy redukcji słowa uv dla $u \in U \cup U^{-1}$, $uv \neq 1$

$\varrho(v)$ - — " — końcowe — " — vw

[mogą być trywialne]

LEMAT. Gdy U jest N-zredukowane, to

(1) $\forall u \in U \cup U^{-1}$ $\quad u = \lambda(u)\,\mu(u)\,\varrho(u)$ dla pewnego <u>niepustego</u> $\mu(u)$.

(2) Dla dowolnego ciągu $u_1, \dots, u_n$ z $U \cup U^{-1}$ t.że $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$ dla $i=1,\dots,n-1$, gdy redukujemy iloczyn $u_1 u_2 \dots u_n$ to skreślenia „nie zahaczają" o fragmenty $\mu(u_i)$.

(2') Ponadto $|u_1 \dots u_n| \geq |u_1 \dots u_{n-1}|$ oraz $|u_1 \dots u_n| \geq |u_2 \dots u_n|$

WNIOSKI. (A) Dla $u_1, \dots, u_n$ j.w. mamy

$$|u_1 \dots u_n| \geq n \quad \text{oraz} \quad |u_1 \dots u_n| \geq |u_i| \text{ dla } i=1,\dots,n.$$

D-d: indukcja z użyciem (2')

(B) Każdy N-zredukowany podzbiór U generuje wolną podgrupę, w której jest bazą.

D-d: iloczyny $u_1 \dots u_n$ jak w (A) dają nietrywialne elementy w F. □

Opiszemy sposób modyfikacji dowolnego skończonego podzbioru U w grupie wolnej F do N-zredukowanego zbioru U' generującego tę samą podgrupę w F co U.

DEF. Elementarne transformacje Nielsena na skończonych układach $U=(u_1, \ldots, u_n)$ elementów z grupy wolnej F:

(T1) zastąpienie pewnego u_i przez u_i^{-1},

(T2) zastąpienie pewnego u_i przez $u_i u_j$ dla pewnego $j \neq i$,

(T3) usunięcie pewnego u_i gdy $u_i = 1$,

(elementy u_k: $k \neq i$ pozostają bez zmian we wszystkich 3 przypadkach).

Transformacja Nielsena – kombinacja skończonej liczby transformacji elementarnych

Transformacja regularna – kombinacja transformacji typu (T1) i (T2).

UWAGI (istotne):

(1) Transformacje (T1) i (T2), a zatem też transformacje regularne, są odwracalne. VERTE

(2) Każda permutacja układu U jest transformacją regularną. VERTE

(3) Każde zastąpienie u_i przez $u_i^{\varepsilon} u_j^{\delta}$ lub $u_j^{\delta} u_i^{\varepsilon}$ dla $\varepsilon, \delta \in \{-1, 1\}$, $j \neq i$ (oraz pozostawienie u_k: $k \neq i$ bez zmian) jest regularną transformacją Nielsena. [ćw]

(4) Elementarne transformacje (a więc i ich kombinacje) nie zmieniają podgrupy generowanej przez elementy transformowanego układu.

(5) Jeśli $\langle U \rangle$ jest podgrupą wolną oraz U jest ~~wolna~~ bazą, zaś T jest uzyskany z U przez regularną transformację Nielsena, to T też jest bazą podgrupy $\langle U \rangle$.

Dowód (5)

Dla transformacji (T1) jest to oczywiste.

Rozważmy transformację typu (T2) dla której $u_i \mapsto u_i u_j$

czyli $U' = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_i u_j, u_{i+1}, \dots, u_n)$

Rozważmy dowolne $\phi : U' \to G$ (G - dowolna grupa).

- ϕ determinuje $\psi : U \to G$; $\psi(u_k) = \phi(u_k)$ dla $k \neq i$

  $\psi(u_i) = \phi(u_i u_j) \cdot (\phi(u_j))^{-1}$

- ψ wyznacza homomorfizm rozszerzający $\overline{\Psi} : \langle U \rangle \to G$

$$\overline{\Psi}(u_i u_j) = \overline{\Psi}(u_i)\, \overline{\Psi}(u_j) =$$
$$= \psi(u_i)\, \psi(u_j) =$$
$$= \phi(u_i u_j)(\phi(u_j))^{-1} \phi(u_j) = \phi(u_i u_j)$$

- Zatem $\overline{\Psi}$ jest homomorfizmem rozszerzającym ϕ.
- Więc $\langle U \rangle$ jest wolna względem U'. □

Ad(1) odwrócić (T2)

pozycje w układzie

	i	j
	$u_i u_j$	u_j
T1	$u_i u_j$	u_j^{-1}
T2	$u_i u_j u_j^{-1} = u_i$	u_j^{-1}
T1	u_i	u_j

Ad(2) transpozycja u_i z u_j

i	j
u_i	u_j
$u_i u_j$	u_j
$u_j^{-1} u_i^{-1}$	u_j
$u_j^{-1} u_i^{-1}$	$u_j u_j^{-1} u_i^{-1} = u_i^{-1}$
$u_j^{-1} u_i^{-1}$	u_i
$u_j^{-1} u_i^{-1} u_i = u_j^{-1}$	u_i
u_j	u_i

4

TWIERDZENIE [Nielsen, 1921] Niech $U=(u_1,\dots,u_n)$ będzie dowolnym skończonym układem elementów grupy wolnej F. Wówczas U można przekształcić za pomocą transformacji Nielsena w układ V który jest N-zredukowany.

Dowód

Krok typu 1 Usuwamy wszystkie $u_i=1$, wszystkie powtórzenia $u_i=u_j$ dla $i\neq j$, oraz jeden z elementów z każdej pary u_i,u_j : $u_j=u_i^{-1}$, osiągając (przejściowo) (N0)

Krok typu 2 gdy U spełnia (N0), ale nie spełnia (N1) to, po ewentualnym zastąpieniu niektórych u_k przez u_k^{-1}, istnieje $u_i,u_j\in U$ t.że $u_iu_j\neq 1$ oraz $|u_iu_j|<|u_i|$ (redukuje się ponad połowę u_i)

Ponieważ dla zredukowanych słów zachodzi $|u^2|\geq|u|$, powyżej musi być $i\neq j$.

Dokonujemy elementarnej transformacji $u_i \rightsquigarrow u_iu_j$ zmniejszając w ten sposób parametr $\Sigma|u_i|$.

UWAGA. Stosując kroki 1 i 2 dopóki się da (skończenie wiele razy!) otrzymujemy układ spełniający (N0) i (N1).

(przy czym parametr $(|U|, \Sigma|u_i|)$ cały czas się zmniejsza).

Krok typu 3

gdy zachodzi (N0) i (N1),

rozważmy trójkę u, v, w z $U \cup U^{-1}$ t.że $uv \neq 1, vw \neq 1$

Niech p – maksymalne początkowe podsłowo v skracające się w uv

q – " ——— w — " — vw

$u = ap^{-1}, v = pbq^{-1}, w = qc$

(z (N1), p i q^{-1} nie zachodzą na siebie w v, ale może być $|b| = 0$)

- Zał. że $|b| > 0$. Wtedy $|uvw| > |u| + |w| - |v|$, więc (N2) spełnione dla tej trójki

  Jeśli tak jest dla wszystkich trójek u, v, w j.w.

  to (N2) spełnione, i U jest N-zredukowany.

- Zał. więc że dla pewnej trójki u, v, w j.w. $|b| = 0$.

  To znamy że $|p| = |q| = \frac{1}{2}|v|$

  Znamy też że $u \neq v, v \neq w$ bo $|uv| = |u|, |vw| = |w|$

  (a tymczasem $|xx| > |x|$ dla x zredukowanego).

Chcemy wykonać jedną z transformacji

$u \rightsquigarrow uv$ lub $w \rightsquigarrow vw$

(uprzednio wykonując (T1) jeśli któreś $u, v, w \in U^{-1}$)

Żadna z tych transformacji nie zmniejsza $|U|$ ani $\Sigma|u_i|$, więc potrzebujemy innego kryterium redukcji złożoności układu.

Będzie nim redukcja w hierarchii pewnego dobrego porządku na układach n elementów:

pomocnicze dobre porządki

- $\ll$ pomocniczy dobry porządek na generatorach bazy grupy F i ich odwrotnościach (czyli na $X \cup X^{-1}$ gdzie $F = F_X$).

- $\ll$ indukowany porządek leksykograficzno-długościowy na zredukowanych słowach nad $X \cup X^{-1}$:
  - $u \ll w$ gdy $|u| < |w|$
  - gdy $|u| = |w|$, $u = x_1 \cdots x_n$, $w = y_1 \cdots y_n$

    $u \ll w \iff \exists k : x_i = y_i$ dla $i < k$ oraz $x_k \ll y_k$

  Jest to dobry porządek.

- $L(w)$ – lewa połowa słowa w – początkowe podsłowo długości n jeśli $|w| = 2n$ lub $|w| = 2n-1$ („większa" lewa połowa)

- porządek $<$ („połówkowy") na słowach:

  $u < w$ gdy $|u| < |w|$ lub

  $|u| = |w|$ i $\min\{L(u), L(u^{-1})\} \ll \min\{L(w), L(w^{-1})\}$ lub

  $|u| = |w|$, $\min = \min$ i $\max \ll \max$

  Jest to dobry porządek na F (choć niediniowy, bo u nieporównywalne z u^{-1})

  [lub dobry liniowy na $F/_{\cdot^{-1}}$]

- W zbiorze układów ustalonej długości n utożsamiamy układy różniące się o ciąg transformacji (T1) $[u_i \mapsto u_i^{-1}]$

- porządek $<$ na klasach układów (uporządkowanych)

  $(u_1, \ldots, u_n) < (w_1, \ldots, w_n)$ jeśli $\exists k : u_i = w_i$ dla $i < k$ oraz $u_k < w_k$

  dobry porządek

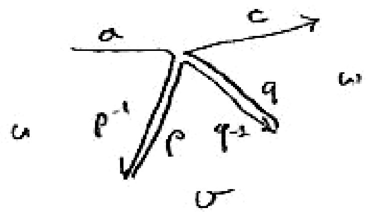
LEMAT. Jeśli $|u|=|w|$, $L(u)=L(w)$, $L(u^{-1}) \ll L(w^{-1})$ to $u<w$.

<u>d-d</u> przypadki dotyczące położenia $L(u)=L(w)$ w porządku $\ll$ względem $L(u^{-1})$ i $L(w^{-1})$. $\square$

(koła typu 3, czyli do)

Wracamy do trójki $u, v, w \in U \cup U^{-1}$

takiej, że



$u \neq v$, $v \neq w$, $u \neq w^{-1}$ $|p| = |q| = \frac{1}{2}|v|$

Chcemy zrobić: $u \rightsquigarrow uv$ lub

$w \rightsquigarrow vw$.

- Zauważmy że $p \neq q$, bo inaczej v redukowalne

- 1°. Załóżmy że $q \ll p$.

  Porównajmy u z uv. Jest $|uv| = |u|$ $|u|$

  Ponieważ $|p^{-1}| \leq \frac{1}{2}|u|$ i podobnie $|q^{-1}| = |p^{-1}| \leq \frac{1}{2}|uv| =$

  więc $L(u)$ oraz $L(uv)$ zaczyna się w podstawie a,

  czyli $L(u) = L(uv)$.

  Ale mamy też $L(u^{-1})$ zaczyna się od p

  $L((uv)^{-1})$ zaczyna się od q

  wobec tego $L((uv)^{-1}) \ll L(u^{-1})$.

  Ostatecznie więc $uv \ll u$.

  W tym wypadku dokonamy transformacji $u \rightsquigarrow uv$ (zastępując uprzednio $u, v, \in U^{-1}$ przez odwrotności jeśli trzeba)

  otrzymując nowy układ $U' \ll U$.

- 2°. Gdy $p \ll q$, podobnie pokazujemy że wówczas $vw \ll w$.

  Wtedy wykonujemy $w \rightsquigarrow vw$ otrzymując $U' < U$.

Zreasumujmy dowód TWIERDZENIA.

1. Iterujemy kroki typu 1 i 2 by dostać układ spełniający (N0) i (N1)

2. Iterujemy kroki typu 3 aż,

   A układ przestaje spełniać (N0) lub (N1), albo

   B układ dalej spełnia (N0) i (N1), i nie da się już wykonać dalszego kroku typu 3

   Jedna z tych możliwości musi zajść, bo $<$ jest dobrym porządkiem.

3. Gdy pojawi się B, otrzymujemy układ N-zredukowany

   Gdy pojawi się A, wracamy do punktu 1

W końcu dostajemy układ N-zredukowany.

KONSEKWENCJE.

TWIERDZENIE 1. Każda podgrupa w grupie wolnej generowana przez skończony układ elementów jest wolna.

d-d: Niech $U = (u_1, \dots, u_n)$ będzie układem generatorów podgrupy $H < F$. Transformacja Nielsena przeprowadza go na układ $V = (v_1, \dots, v_k)$, który
- generuje tą samą podgrupę H
- jest N-zredukowany. (TWIERDZENIE)

Wówczas $H = \langle V \rangle$ jest wolna na podst. WNIOSKU B. □

TWIERDZENIE 2. Niech U będzie n-elementowym podzbiorem grupy wolnej F_n rangi n, generującym tą grupę. Wówczas U jest bazą w F_n.

dowód: Rozważmy transformację Nielsena przeprowadzającą U w N-zredukowany układ V. Wówczas V dalej generuje F_n, i w takim razie transformacja $U \rightsquigarrow V$ musiała być regularna. (bo gdyby były użyte transformacje (T3) to liczba elementów w V byłaby mniejsza niż n, wbrew temu że $\operatorname{rank}(F_n) = n$). Ponadto V jest bazą F_n.

7'

• Zatem U transformuje się regularne na bazę.

Wobec tego sam jest bazą (UWAGA (5) po def. transform. Nelsona).

$\square$

LEMAT 3. Niech V będzie N-zredukowanym układem generującym grupę F_n. Wówczas V pokrywa się ze standardowym układem generującym X, z dokładnością do permutacji układu i odwrotności elementów.

Dowód: Zał. nie wprost, że V zawiera element v_0 z $|v_0|>1$.

Każdy $x_i \in X$ wyraża się jednoznacznie jako zredukowany iloczyn elementów z V, przy czym przynajmniej jeden z nich ma w tym wyrażeniu v_0 (bo inaczej F_n generowane przez mniej niż n elementów, mianowicie $V \setminus \{v_0\}$).

Zał. że $x_0 \in X$ ma v_0 w wyrażeniu jako iloczyn elementów z V.

Z WNIOSKU (A) mamy wówczas $1=|x_0|\geqslant|v_0|$

wbrew założeniu, że $|v_0|>1$. $\square$

TWIERDZENIE 4. $\forall n\in\mathbb{N}$ grupa $\mathrm{Aut}(F_n)$ jest generowana przez skończony zbiór automorfizmów ($\mathrm{Aut}(F_n)$ jest skończenie generowalna).

Dowód:

Krok 1 - elementarne automorfizmy.

Niech $X=(x_1,\dots,x_n)$ - kanoniczny układ bazowy dla F_n.

- transformacji elementarnej $T_i: u_i \rightsquigarrow u_i^{-1}, u_j \rightsquigarrow u_j$ dla $j\neq i$ (typu (T1)) przypisujemy automorfizm $\varphi_i: F_n\to F_n$ zadany przez $\varphi_i(x_i)=x_i^{-1}$, $\varphi_i(x_j)=x_j$ dla $j\neq i$.
- $T_{ij}: u_i \rightsquigarrow u_i u_j, u_j \rightsquigarrow u_j$ dla $j\neq i$ (typu (T2)) przypisujemy
  $\varphi_{ij}: F_n\to F_n$, $\varphi_{ij}(x_i)=x_i x_j$, $\varphi_{ij}(x_j)=x_j$ dla $j\neq i$.

Te φ_i oraz φ_{ij} nazywamy automorfizmami elementarnymi.

Krok 2. Złożeniom elementarnych transformacji Nielsena typów (T1) i (T2) odpowiada złożenie stowarzyszonych elementarnych automorfizmów. Dokładniej:

$$T_{\alpha_m}\cdots T_{\alpha_1}(X)=\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_m}(X):=\left(\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_m}(x_1),\dots,\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_m}(x_n)\right)$$

gdzie każdy T_{α_k} jest jednym z T_i lub T_{ij}, zaś φ_{α_k} jest stowarzyszony.

Dowód Kroku 2 (indukcja po m):

- dla $m=1$ $T_{\alpha_1}(X)=\varphi_{\alpha_1}(X)$ zachodzi;
- załóżmy indukcyjnie, że $T_{\alpha_{m-1}}\cdots T_{\alpha_1}(X)=\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m-1}}(X)$.
  Oznaczmy $h=\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m-1}}$ oraz $X'=h(X)=\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m-1}}(X)=T_{\alpha_{m-1}}\cdots T_{\alpha_1}(X)$
  Kluczowa obserwacja: $T_{\alpha_m}(X')=h\varphi_{\alpha_m}h^{-1}(X')$.

VERTE

Wstawiając:

$$T_{\alpha_m}T_{\alpha_{m-1}}\cdots T_{\alpha_1}(X)=T_{\alpha_m}(X')=h\varphi_{\alpha_m}\underbrace{h^{-1}(X')}_{X}=h\varphi_{\alpha_m}(X)=$$
$$=\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m-1}}\varphi_{\alpha_m}(X).\ \square$$

Kluczowa obserwacja: $T_{\alpha m}(x') = h\varphi_{\alpha m} h^{-1}(x')$

$$x_i' = h(x_i)$$

$$h\varphi_{\alpha m} h^{-1}(x_i') = h\varphi_{\alpha m}(x_i) = \begin{cases} h(x_i^{-1}) & \text{jeśli } T_{\alpha m} = T_i \\ h(x_i x_j) & \text{jeśli } T_{\alpha m} = T_{ij} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (h(x_i))^{-1} \\ h(x_i)\, h(x_j) \end{cases} = \begin{cases} (x_i')^{-1} \\ x_i' x_j' \end{cases}$$

Krok 3 (główny dowód).

Elementarne automorfizmy φ_i oraz φ_{ij} generują $Aut(F_n)$.

Dowód Kroku 3

- Niech $h \in Aut(F_n)$, $h: F_n \to F_n$, dowolny.

  Niech $U = h(X) = (h(x_1), \ldots, h(x_n)) = (u_1, \ldots, u_n)$

- Ponieważ układ U generuje F_n, jak w dowodzie TW 2 istnieje ciąg elementarnych transformacji Nielsena typów (N1) i (N2) przekształcających U w X. Rozważmy ciąg $T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_m}$ transformacji odwrotnych, przekształcających X w U, tzn.

  $U = T_{\alpha_m} \cdots T_{\alpha_1}(X)$.

- Z Kroku 2, $U = \varphi_{\alpha_1} \cdots \varphi_{\alpha_m}(X)$, ale ponieważ $U = h(X)$, zatem $h = \varphi_{\alpha_1} \cdots \varphi_{\alpha_m}$, czyli h jest złożeniem automorfizmów elementarnych. $\square$ KONIEC DOWODU TW 3. $\square$

[Federer-Jonsson, 1950]

10

Rozwinięcie argumentów Nielsena
(znajdowanie bazy wolnych generatorów dla dowolnej podgrupy w grupie wolnej — także dla nieskończenie generowanej podgrupy)

- F grupa wolna, $G < F$ dowolna podgrupa
- dla $g \in G$ rozważamy dubletony $[g] = \{g, g^{-1}\} \in G/_{\cdot^{-1}}$

  i relację długościowo-półtórkową Nielsena $<$ na nich.

- dla $g \in G$ niech $G_g := \langle h \in G : [h] < [g] \rangle$

  — podgrupa w G generowana przez elementy poniżej g w G

- Niech $A = \{g \in G : g \notin G_g\}$

  elementy grupy G nie należące do podgrupy generowanej przez elementy poniżej nich.

  UWAGI: * $1 \notin A$ bo 1 najmniejszy względem $<$

  $G_1 = \langle \emptyset \rangle = \{1\}$ (konwencja)

  więc $1 \in G_1$.

  * jeśli $\underline{g}$ najmniejszy nietrywialny w G to $\underline{g} \in A$

  bo $G_{\underline{g}} = \langle 1 \rangle = \{1\}$, $\underline{g} \notin G_{\underline{g}}$.

FAKT 1 A generuje G.

Dowód: jeśli nie, to w G istnieje najmniejszy $g_0 \notin \langle A \rangle$.

Wszystkie $h^{\in G} : [h] < [g_0]$ należą do $\langle A \rangle$, zatem $G_{g_0} = \langle h^{\in G} : [h] < [g_0] \rangle \subseteq \langle A \rangle$.

Zatem $g_0 \notin G_{g_0}$, czyli $g_0 \in A$, wbrew temu że $g_0 \notin \langle A \rangle$. $\square$

FAKT 2 A jest zbiorem N-zredukowanym (więc jest bazą grupy wolnej $G=\langle A\rangle$).

Dowód:

1°. $1\notin A$, j.w., stąd (N0).

2°. Dla pokazania (N1) i (N2) wystarczy pokazać, że nie ma transformacji (T2) redukującej A względem $<$ jak w dowodzie Tw. Nielsena (redukującej albo długość, albo porządek „pośredni").

Czyli wystarczy pokazać, że jeśli $x,y\in A$, $x\neq y$, to dla dowolnych $\{\varepsilon,\delta\}\in\{-1,+1\}$ nie zachodzi $[x^{\varepsilon}y^{\delta}]<[x]$ ani $[x^{\varepsilon}y^{\delta}]<[y]$.

Zał. że $[x]<[y]$.

- gdyby $[xy]<[y]$, to $y\in\langle x,xy\rangle\subset G_y$, wbrew $y\in A$
- gdyby $[x^{-1}y]<[y]$, to $y\in\langle x,x^{-1}y\rangle\subset G_y$, — " —
- $[xy^{-1}]<[y]$ — " —
- $[x^{-1}y^{-1}]<[y]$ — " —

Gdyby $[xy]<[x]$, to tym bardziej $[xy]<[y]$ i sprzeczność j.w.

itd. $\square$

WNIOSEK.

Każda podgrupa grupy wolnej jest wolna.