PREZENTACJE GRUP

- prezentacja = $\langle$ generatory | równania/relacje $\rangle$

$$= \langle s_1, s_2, \dots \mid u_1 = v_1,\ u_2 = v_2, \dots \rangle$$
$$= \langle \{s_\alpha\} \mid \{u_\beta = v_\beta\} \rangle$$

s_α - symbole, $S = \{s_\alpha\}$

u_β, v_β - słowa nad $S \cup S^{-1}$

- Jeśli s_α są faktycznymi (generatorami) elementami grupy G, to równość $u_\beta = v_\beta$ w grupie G jest równoważna równości $u_\beta v_\beta^{-1} = 1$

Możemy więc przyjąć, że równości/relacje mają postać $r_\beta = 1$ gdzie r_β słowo nad $S \cup S^{-1}$: $\langle S \mid \{r_\beta = 1\} \rangle$

- W praktyce, często pomija się przyrównanie do 1 zapisując prezentację w formie $\langle S \mid \{r_\beta\} \rangle = \langle S \mid R \rangle$

- Będziemy używać tych konwencji zamiennie.

DEF. Niech $P = \langle S \mid R \rangle$ będzie prezentacją. Grupą zadaną przez P nazywamy grupę (ilorazową) $G_P := F_S / N_R$, gdzie N_R jest najmniejszym dzielnikiem normalnym w F_S zawierającym elementy reprezentowane przez słowa $r \in R$.

UWAGI:

(1) Dla dowolnej grupy G dowolnego podzbioru $R \subset G$ najmniejszy dzielnik normalny zawierający R, N_R, jest dobrze określony - jest równy przekrojowi wszystkich podgrup normalnych w G zawierających R.

(2) W dowolnej grupie G,

$$N_R = \left\{ g_1 r_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 r_2^{\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_k r_k^{\varepsilon_k} g_k^{-1} : k\in \mathbb{N}, r_i \in R, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, g_i \in G \right\}$$ ćw.

(iloczyny sprzężeń elementów z $R \cup R^{-1}$ przez elementy z G). □

(3) Ponieważ elementy $s \in S$ generują F_S, ich obrazy w ilorazie F_S/N_R, które dalej oznaczamy przez S, generują ten iloraz. W tym sensie S jest zbiorem generatorów grupy $G_P = F_S/N_R$.

(4) Jeśli słowa $r \in R$ potraktujemy jako iloczyny elementów z F_S, to $r \in N_R$. [relatory, $\bar{r} \in F_S$

Jeśli potraktujemy je jako iloczyny elementów z G_P, to $r = 1$ (w G_P).

W tym sensie równości $r = 1$ rzeczywiście zachodzą w G_P.

(5) Będziemy krótko pisać: $G_P = \langle S | R \rangle$

niejako utożsamiając prezentację z wyznaczoną przez nią grupą.

(6) Każda grupa G jest (z dokładnością do izomorfizmu) zadana przez pewną prezentację P.

D-d: Niech S - dowolny układ generatorów G

(w najgorszym razie $S = G$).

Niech $\phi : F_S \to G$ homomorfizm zadany przez $\underset{F_S}{\underset{\cap}{s}} \mapsto \underset{G}{\underset{\cap}{s}} : s \in S$

Niech R - dowolny zbiór generujący jako dzielnik normalny $\mathrm{Ker}\,\phi$ (w najgorszym razie $R = \mathrm{Ker}\,\phi$) - wyrażone jako iloczyny elementów z $S \cup S^{-1}$.

Wówczas $G \cong F_S/N_R$, $G = \langle S | R \rangle$. □

Grupa $\langle S \mid R \rangle$ jest „najbardziej wolna"
spośród grup, których generatory spełniają równania
reprezentowane relacjami z R,
w następującym precyzyjnym sensie.

LEMAT (uniwersalna własność grup zadanych prezentacją).
Niech $G_P = \langle S \mid R \rangle$.

Załóżmy, że $\phi : S \to H$ jest odwzorowaniem w dowolną grupę H
takim, że jeśli $s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \ldots s_k^{\varepsilon_k} \in R$, $s_i \in S$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$,
to $\phi(s_1)^{\varepsilon_1} \phi(s_2)^{\varepsilon_2} \ldots \phi(s_k)^{\varepsilon_k} = 1$. Wówczas ϕ wyznacza
jednoznaczny homomorfizm $\overline{\overline{\Phi}} : G_P \to H$ taki, że elementom
w G_P wyznaczonym przez $s \in S$ przyporządkowane są elementy $\phi(s) \in H$.

Dowód: ϕ wyznacza homomorfizm $\overline{\Phi} : F_S \to H$.
Jądro $\operatorname{Ker} \overline{\Phi}$ zawiera elementy $s_1^{\varepsilon_1} \ldots s_k^{\varepsilon_k}$ z R, bo
$$\overline{\Phi}(s_1^{\varepsilon_1} \ldots s_k^{\varepsilon_k}) = \overline{\Phi}(s_1)^{\varepsilon_1} \ldots \overline{\Phi}(s_k)^{\varepsilon_k} = \phi(s_1)^{\varepsilon_1} \ldots \phi(s_k)^{\varepsilon_k} = 1 \text{ w } H.$$
Zatem $\operatorname{Ker} \overline{\Phi} \supset N_R$.
Oznacza to, że $\overline{\Phi}$ indukuje $\overline{\overline{\Phi}} : F_S / N_R \to H$.
$$F_S / N_R \to H \quad \text{“} \quad F_S / \operatorname{Ker} \overline{\Phi}$$

Jednoznaczność $\overline{\overline{\Phi}}$ wynika
z tego, że S generuje G_P. $\square$

PRZYKŁADY (rozpoznawanie grup Gp; znajdowanie prezentacji grupy)

(0) $\langle S \mid \emptyset \rangle = F_S$

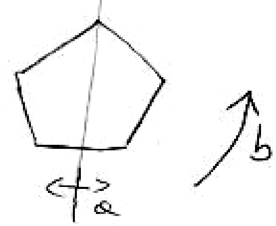
(1) <u>Grupy cykliczne skończone</u>. Sprawdzimy, że $\mathbb{Z}_n = \langle t \mid t^n \rangle$.

Etap I. Znajdowanie postaci normalnej elementów.

- Każdy element grupy $\langle t \mid t^n \rangle$ zapisuje się jako t^m dla pewnego $m \in \mathbb{Z}$.
- Dzięki relacji $t^n = 1$ mamy w grupie $\langle t \mid t^n \rangle$ równości $t^m = t^r$, gdzie r jest resztą z dzielenia m przez n
- Zatem $t^0 = 1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ dają wszystkie elementy $\langle t \mid t^n \rangle$ (być może z powtórzeniami).

Etap II. Nie ma powtórzeń, bo z lematu o uniwersalności mamy homomorfizm $h : \langle t \mid t^n \rangle \to \mathbb{Z}_n$, $h(t) =$ generator $\mathbb{Z}_n$.
h przeprowadza elementy z $\langle t \mid t^n \rangle$ reprezentowane przez $1, t, \dots, t^{n-1}$ na <u>parami</u> <u>różne</u> elementy w $\mathbb{Z}_n$.
Więc i te elementy w $\langle t \mid t^n \rangle$ są różne, zaś h jest izomorfizmem. $\square$

(2) D_n - grupa dyhedralna rzędu $2n$
= grupa symetrii n-kąta foremnego



a - symetria osiowa
b - obrót o kąt $2\pi/n$

- a, b generują D_n (bo b^i dają wszystkie obroty, zaś złożenia $b^i a$ dają wszystkie odbicia)
- a, b spełniają równości $a^2 = 1$, $b^n = 1$, $aba^{-1} = b^{-1}$

↑ sprzężenie obrotu za pomocą odbicia jest obrotem w przeciwną stronę

FAKT. $D_n = \langle a, b \mid a^2, b^n, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$

Etap I: w – dowolne słowo w alfabecie $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$

- każdą potęgę a można zastąpić przez 1 lub a

  $a^i = a^{i \pmod 2}$

- każdą potęgę b można zastąpić przez $1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}$

  $b^i = b^{i \pmod n}$

- czyli wszystkie elementy $\langle S \mid R \rangle$ są reprezentowane słowami postaci

  (*) $ab^{i_1}ab^{i_2}\ldots$ lub $b^{i_1}ab^{i_2}ab^{i_3}\ldots$ $\quad i_k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

- $a^2 = 1 \Rightarrow a = a^{-1}$, więc $aba^{-1} = b^{-1} \Rightarrow aba = b^{-1}$

  a stąd wynika $\underline{ba} = a^{-1}b^{-1} = \underline{ab^{-1}}$; podobnie $b^{-1}a = ab$

- W słowach postaci (*) możemy po kolei „przepchać" wszystkie a na lewo, dostając słowa postaci $a^k b^m$

- stosując $a^2 = 1$, $b^n = 1$ redukujemy słowo $a^k b^m$ do jednego ze słów

  $1, b, \ldots, b^{n-1}$

  $a, ab, \ldots, ab^{n-1}$

Te słowa reprezentują wszystkie elementy grupy $\langle a, b \mid a^2, b^n, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$ (być może z powtórzeniami).

Etap II Homomorfizm $h : \langle a, b \mid a^2, b^n, aba^{-1} = b^{-1} \rangle \to D_n$

$a \mapsto a$, $b \mapsto b$ (z uniwersalności grupy zadanej prezentacją).

h przekształca elementy $1, b, \ldots, b^{n-1}$ na różne obroty z D_n

zaś elementy $a, ab, \ldots, ab^{n-1}$ na różne odbicia z D_n

Stąd h izomorfizm. $\square$

TERMINOLOGIA:

- grupa skończenie generowana – gdy posiada skończony zbiór generatorów S
- skończenie prezentowalna – gdy posiada skończoną prezentację $\langle S | R \rangle$ (zbiory S i R skończone).

ŹRÓDŁA TAKICH GRUP W MATEMATYCE (oprócz grup skończonych):

(1) grupy podstawowe kombinatoryczne opisywalnych przestrzeni (kompleksy, zwarte rozmaitości) [topologia algebraiczna]

(2) dyskretne podgrupy w grupach Liego (macierzowych, grupach izometrii porządnych przestrzeni, itp) lub inne grupy działające w sposób nieciągły na przestrzeniach

(3) grupy klas odwzorowań (np. klasy izotopii homeomorfizmów).

(4) grupy automorfizmów dyskretnych nieskończonych struktur (np. $\mathrm{Aut}(F_n)$)

OGÓLNE FAKTY:

- grup skończenie prezentowalnych jest przeliczalnie wiele
- [Neumann '37] Istnieje continuum parami nieizomorficznych grup o dwóch generatorach

Grupy sk. gen. ale nieskończenie prezentowalne występujące w „przyrodzie" mają b. często regularne zbiory relacji

$\rightsquigarrow$ grupy rekurencyjnie prezentowalne = sk. gen + relacje tworzą zbiór rekurencyjny (opisywalny za pomocą algorytmu)

- [Higman '61] grupa jest rekurencyjnie prezentowalna $\iff$ zanurza się w grupę skończenie prezentowalną
- większość grup skończenie generowanych nie jest rekurencyjnie prezentowalna.

PROBLEMY Dehna:

1911, dały impuls rozwojowi komb. teor. gr.

Dotyczą one algorytmicznej rozstrzygalności następujących pytań:

PROBLEM SŁÓW:

Czy dwa słowa w_1, w_2 nad $S \cup S^{-1}$ dają ten sam element w grupie $G = \langle S \mid R \rangle$?

<u>Równoważnie</u>: czy słowo w nad $S \cup S^{-1}$ reprezentuje $1 \in G$?

PROBLEM SPRZĘŻONOŚCI:

Czy słowa w_1, w_2 nad $S \cup S^{-1}$ reprezentują elementy sprzężone w $G = \langle S \mid R \rangle$?

PROBLEM IZOMORFIZMU:

Czy grupy $\langle S_1 \mid R_1 \rangle$ $\langle S_2 \mid R_2 \rangle$ są izomorficzne?

PROBLEM SŁÓW: (0) Rozwiązej, pokazując algorytm rozstrzygający problem słów dla prezentacji $\langle a, b \mid a^2, b^n, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$ grupy dihedralnej.

(1) Jeśli G skończenie prezentowalna, i problem słów jest rozstrzygalny dla pewnej skończonej prezentacji G, to jest też rozstrzygalny dla każdej innej skończonej prezentacji dla G.

(3) [Novikov '55] [Boone '59] Istnieją skończone prezentacje z nierozstrzygalnym problemem słów.

(2) [Magnus '32] Grupy zadane skończoną prezentacją z jedną relacją mają rozstrzygalny problem słów. Nie wiadomo, czy grupy z dwoma relacjami mają rozstrzygalny problem słów.

PROBLEM SPRZĘŻONOŚCI: (0) na ćwiczeniach rozstrzygalny problem sprzężoności w grupach wolnych.

(1) [Dehn 1912] Rozstrzygalny dla grup podstawowych powierzchni. (problem słów też).

(2) Istnieją grupy skończenie prezentowalne z rozstrzygalnym problemem słów [m.in. Miller '71] i nierozstrzygalnym problemem sprzężoności.

(3) problem sprzężoności jest rozstrzygalny dla grup z jedną relacją. [Arye Juhasz '92]

PROBLEM IZOMORFIZMU

[Adyan '57] [Rabin '58] Nierozstrzygalny jest nawet problem trywialności grupy zadanej skończoną prezentacją.