TRANSFORMACJE TIETZEGO (1908)

Operacje na prezentacjach
nie zmieniające reprezentowanej grupy
z dokładnością do kanonicznych izomorfizmów.

(T1) dodanie nowych relacji będących konsekwencjami starych

- dla $R' \subset N_R$ transformacja $\langle S | R \rangle \rightsquigarrow \langle S | R \cup R' \rangle$

- FAKT. Ponieważ $N_{R \cup R'} = N_R$, więc identyczność id_S rozszerza się do izomorfizmu grup $\underset{F_S/N_R}{\overset{\shortparallel}{\langle S | R \rangle}} \longrightarrow \underset{F_S/N_{R\cup R'}}{\overset{\shortparallel}{\langle S | R \cup R' \rangle}}$.

UWAGA. W praktyce rozpoznawanie czy $r' \in N_R$, i czy zatem można je „bezkarnie" dorzucić do prezentacji, odbywa się na 2 sposoby:

(1) FAKT. $w \in N_R \iff w = 1$ w $\langle S | R \rangle = F_S / N_R$
(relacja $w=1$ rzeczywiście zachodzi w $\langle S | R \rangle$).

OCZYWISTE

[Stosuje się, gdy o grupie $G = \langle S | R \rangle$
wiemy coś niezależnie od prezentacji.]
Np. w grupie dyhedralnej $D_n = \langle a, b / a^2, b^n, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$ zachodzi też $(ab)^2 = 1$, więc $D_n = \langle a, b / a^2, b^n, aba^{-1} = b^{-1}, (ab)^2 \rangle$

(2) FAKT. $w \in N_R \iff w = 1$ jest logiczną teoriogrupową konsekwencją równości odpowiadających relacjom z R

DEF. w jest <u>logiczną</u> <u>teorio-grupową</u> <u>konsekwencją</u> <u>relacji z R</u> jeśli da się wyprowadzić z równości $r = 1 : r \in R$ (oraz równości typu $ww^{-1} = 1$) przez iterowanie implikacji postaci

$u_1 = v_1,\ u_2 = v_2 \implies u_1 \cdot u_2 = v_1 \cdot v_2$.

$u = v \implies u^{-1} = v^{-1}$

PRZYKŁADY takich iterowanych implikacji

- $u=1 \Rightarrow u^{-1}=1$
- $u=1 \Rightarrow \forall w \quad w^{-1}uw=1$
- $u=v,\ v=w \Rightarrow u=w$
- $u=v,\ aub=1 \Rightarrow avb=1$

Dowód FAKTU ②:

Niech $L_R=\{w : w=1$ jest logiczną teoriogrupową konsekwencją relacji z $R\}$.

$N_R \subset L_R$.

Wiemy że
* $R\subset L_R$, ale też $R^{-1}\subset L_R$ (bo $u=1 \Rightarrow u^{-1}=1$)
* $v,w\in L_R \Rightarrow vw\in L_R$
  (bo $v=1, w=1 \Rightarrow vw=1$)
* $u\in L_R$, w dowolne $\Rightarrow wuw^{-1}\in L_R$
  (bo $u=1 \Rightarrow wuw^{-1}=1$)

Zatem całe N_R, składające się z iloczynów sprzężeń elementów z $R\cup R^{-1}$, zawiera się w L_R.

$L_R\subset N_R$.

Wystarczy pokazać, że: ① jeśli $u_1v_1^{-1}\in N_R$, $u_2v_2^{-1}\in N_R$ to $(u_1u_2)(v_1v_2)^{-1}\in N_R$

② jeśli $uv^{-1}\in N_R \Rightarrow u^{-1}v\in N_R$

① $u_1v_1^{-1}\in N_R \xrightarrow{\text{sprzężenie}} v_1^{-1}u_1\in N_R$

$u_2v_2^{-1}\in N_R$

$\xrightarrow{\text{iloczyn}} v_1^{-1}u_1u_2v_2^{-1}\in N_R$

$\Downarrow$ sprzężenie

$u_1u_2v_2^{-1}v_1^{-1}\in N_R$

$\|$

$u_1u_2(v_1v_2)^{-1}\in N_R$ □

② $uv^{-1}\in N_R \xrightarrow{\text{odwrotność}} vu^{-1}\in N_R$

$\xrightarrow{\text{sprzężenie}} v^{-1}(vu^{-1})v = u^{-1}v\in N_R$ □

Dalsze transformacje Tietzego

$(T1)^{-1}$ – odwrotne do $(T1)$

usunięcie pewnego podzbioru relacji będących konsekwencjami pozostałych

- $R = R_1 \sqcup R_2$ (podzbiory F_S), $R_2 \subset N_{R_1}$;
  transformacja $\langle S|R\rangle \rightsquigarrow \langle S|R_1\rangle$
- id_S rozszerza się do izomorfizmu $\langle S|R\rangle \longrightarrow \langle S|R_1\rangle$

(T2) dodanie nowych generatorów, oraz relacji będących opisami nowych generatorów w terminach starych

- T – kolekcja nowych symboli, rozłączna z S, $\{u_t : t\in T\}$ zbiór słów nad $S\cup S^{-1}$,
  operacja $\langle S|R\rangle \rightsquigarrow \langle S\sqcup T \,|\, R\cup\{t=u_t : t\in T\}\rangle$
- FAKT. id_S rozszerza się do izomorfizmu $\langle S|R\rangle \xrightarrow{\varphi} \langle S\sqcup T \,|\, R\cup\{t=u_t\}_{t\in T}\rangle$

Dowód: • id_S rozszerza się do homomorfizmu φ

- Niech $\psi : \langle S\sqcup T \,|\, R\cup\{t=u_t\}_{t\in T}\rangle \to \langle S|R\rangle$ zadany przez $\psi(s)=s$, $\psi(t)=u_t$
- dobrze określony homomorfizm z lematu o uniwersalności
- $\psi\varphi = id_{\langle S|R\rangle}$, $\varphi\psi = id_{\langle S\sqcup T|R\cup\{t=u_t\}\rangle}$
  co łatwo widać na generatorach tych grup. □

$(T2)^{-1}$ – odwrotny do (T2)

- $S = S_1 \sqcup S_2$, $R = R_1 \sqcup R_2$,
- wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między S_2 i R_2
  reprezentowane indeksami $S_2 = \{s_\alpha\}$, $R_2 = \{r_\alpha\}$
  przy czym każdą relację $r_\alpha \in R_2$ można równoważnie przepisać
  w formie $s_\alpha = w_\alpha$, w_α - słowo nad $S_1\cup S_1^{-1}$
- relacje z R_1 nie zawierają generatorów z S_2
- transformacja $\langle S|R\rangle \rightsquigarrow \langle S_1|R_1\rangle$ • FAKT. id_{S_1} rozszerza się do izomorfizmu $\langle S|R\rangle \leftarrow \langle S_1|R_1\rangle$

UWAGI.

- Pod wpływem transformacji Tietzego grupa reprezentowana przez prezentację nie zmienia się z dokładnością do kanonicznych izomorfizmów

- Gdy w operacji $(T1)/(T1)^{-1}$ dodajemy/usuwamy 1 relację, zaś w operacji $(T2)/(T2)^{-1}$ dodajemy/usuwamy 1 generator i 1 relację to mamy tzw. jednokrotne operacje Tietzego.

PRZYKŁAD. Grupa dyhedralna $D_4 = \langle a,b \mid a^2, b^4, aba^{-1}=b^{-1}\rangle$ ma też prezentację $\langle p,q \mid p^2, q^2, (pq)^4\rangle$.

D-d:

najpierw to dodajemy a potem starą usuwamy

$$D_4 = \langle a,b \mid a=a^{-1}, b^4, aba^{-1}b\rangle \overset{(T1)+(T1)^{-1}}{=} \langle a,b \mid a=a^{-1}, b^4, abab\rangle =$$

$$\overset{(T2)}{=} \langle a,b,q \mid a=a^{-1}, b^4, (ab)^2, q=ab\rangle \overset{(T1)+(T1)^{-1}}{=} \langle a,b,q \mid a=a^{-1}, b^4, q^2, b=a^{-1}q\rangle$$

$$\overset{(T1)+(T1)^{-1}}{=} \langle a,b,q \mid a=a^{-1}, b^4, q^2, b=aq\rangle \overset{(T1)+(T1)^{-1}}{=} \langle a,b,q \mid a^2, (aq)^4, q^2, b=aq\rangle$$

$$\overset{(T2)^{-1}}{=} \langle a,q \mid a^2, q^2, (aq)^4\rangle. \square$$

TWIERDZENIE (TIETZE 1908)

Jeśli grupy zadane prezentacjami $\langle S|R\rangle$, $\langle T|P\rangle$ są izomorficzne to istnieje ciąg transformacji Tietzego przekształcających $\langle S|R\rangle$ na $\langle T|P\rangle$. Jeśli obie prezentacje są skończone, to istnieje taki skończony ciąg jednokrotnych transformacji Tietzego. Ponadto, dla danego izomorfizmu $\varphi : \langle S|R\rangle \to \langle T|P\rangle$ transformacje Tietzego można dobrać tak, by zadany przez nie kanoniczny izomorfizm pokrywał się z φ.

UWAGA. To wygląda jak rozwiązanie problemu izomorfizmu dla skończonych prezentacji, ale w rzeczywistości nim nie jest (brak oszacowania na rozmiar pośrednich prezentacji, a w konsekwencji brak możliwości rozstrzygnięcia, że dwie prezentacje dają nieizomorficzne grupy, przez osiągnięcie w algorytmie STOPU).

Dowód Twierdzenia:

Niech $\varphi : \langle S|R\rangle \to \langle T|P\rangle$ izomorfizm, i niech $\psi = \varphi^{-1}$.

Niech $\varphi(s_\alpha) = u_\alpha(T \cup T^{-1})$ dla $s_\alpha \in S$

$\psi(t_\beta) = w_\beta(S \cup S^{-1})$ dla $t_\beta \in T$.

- Schemat dowodu będzie taki

$$\langle S|R\rangle \overset{(T2)}{\rightsquigarrow} \langle S \sqcup T \mid R \cup \{t_\beta = w_\beta(S\cup S^{-1})\}\rangle$$

$$\overset{(T1)}{\rightsquigarrow} \langle S \sqcup T \mid R \cup \{t_\beta = w_\beta(S\cup S^{-1})\} \cup P \cup \{s_\alpha = u_\alpha(T\cup T^{-1})\}\rangle$$

i analogicznie

$$\langle T|P\rangle \overset{(T2)}{\rightsquigarrow} \dots \overset{(T1)}{\rightsquigarrow}$$

$\square$

- Operacja (T2) powyżej nie wymaga komentarza
- Dla uzasadnienia poprawności operacji (T1) powyżej pokażemy że

(a) relacje $\in P$ są konsekwencjami $R \cup \{t_\beta = w_\beta\}$

(b) relacje $S_\alpha = U_\alpha(T \cup T^{-1})$ są konsekwencjami $R \cup \{t_\beta = w_\beta\}$

- Ad (a): Rozważmy relację $t_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \cdots t_{\beta_m}^{\varepsilon_m} \in P$

W grupie $\langle S \sqcup T \mid R \cup \{t_\beta = w_\beta\} \rangle = \langle S \mid R \rangle$ mamy

$$t_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \cdots t_{\beta_m}^{\varepsilon_m} \overset{t_{\beta_i} = w_{\beta_i}}{=\!=\!=} w_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \cdots w_{\beta_m}^{\varepsilon_m} \overset{\text{def. } w_{\beta_i}}{=\!=\!=} \psi(t_{\beta_1})^{\varepsilon_1} \cdots \psi(t_{\beta_m})^{\varepsilon_m} =$$

$t_\beta \in \langle T \mid P \rangle$

$$= \psi(\underbrace{t_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \cdots t_{\beta_m}^{\varepsilon_m}}_{\substack{\| \\ 1 \text{ w } \langle T \mid P \rangle}}) = \psi(1) = 1$$

czyli $t_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \cdots t_{\beta_m}^{\varepsilon_m} \in N_{R \cup \{t_\beta = w_\beta\}}$. □

- Ad (b): Rozważmy relację $S_\alpha = U_\alpha(T \cup T^{-1})$, równoważnie $S_\alpha^{-1} U_\alpha$

Izomorfizm $\psi : \langle T \mid P \rangle \to \langle S \mid R \rangle = \langle S \sqcup T \mid R \cup \{t_\beta = w_\beta\} \rangle$

spełnia: 1° $\psi(U_\alpha) = S_\alpha$

2° $\psi(t_\beta) = t_\beta$ bo $\psi(t_\beta) = w_\beta(S \cup S^{-1}) \underset{\langle S \sqcup T \mid R \cup \{t_\beta = w_\beta\} \rangle}{\overset{t_\beta = w_\beta}{=\!=\!=}} t_\beta$

1° $\Rightarrow$ $S_\alpha^{-1} = \psi(U_\alpha)^{-1}$

2° $\Rightarrow$ $\psi(U_\alpha) = U_\alpha$

Zatem w grupie $\langle S \sqcup T \mid R \cup \{t_\beta = w_\beta\} \rangle$ zachodzi

$$S_\alpha^{-1} U_\alpha = \psi(U_\alpha)^{-1} \psi(U_\alpha) = 1$$

czyli $S_\alpha^{-1} U_\alpha \in N_{R \cup \{t_\beta = w_\beta\}}$. □ □

ILORAZY GRUP ZADANYCH PREZENTACJĄ

(1) Grupa $\langle S|R\cup P\rangle$ jest ilorazem grupy $\langle S|R\rangle$

(bo $N_R \subset N_{R\cup P}$ i mamy surjekcję $F_S/N_R \to F_S/N_{R\cup P}$ indukowaną przez id_{F_S}).

(2) **LEMAT** (von Dyck, 1883)

Niech $G=\langle S|R\rangle$ i niech $H=G/K$. Niech P będzie zbiorem elementów, generujących K jako dzielnik normalny w G, wyrażonych w terminach $S\cup S^{-1}$. Wówczas $H\cong\langle S|R\cup P\rangle$.

Dowód: z lematu o uniwersalności dostajemy surjektywny homomorfizm

$\varphi:\langle S|R\cup P\rangle \to G/K$ zadany przez

$$\varphi(s)=\underset{s\cdot K}{\underset{\shortparallel}{[s]}}\in G/K \quad \left(\begin{array}{c} s \text{ po prawej traktujemy jako} \\ \text{element z } G \end{array}\right)$$

[relacje z $R\cup P$ są spełnione przez obrazy w G/K bo

- $v\in R$ to $v=1$ w G, więc tym bardziej $v=1$ w G/K;
- $v\in P$ to $v\in K\subset G$ czyli $v=1$ w G/K]

Wystarczy pokazać, że $\ker\varphi=\{1\}$.

Niech $s_1^{\varepsilon_1}\dots s_k^{\varepsilon_k}\in\ker\varphi$.

Wtedy $s_1^{\varepsilon_1}\dots s_k^{\varepsilon_k}$, traktowany jako element z G, należy do K.

Zatem wyraża się przez elementy generujące P jako:

$$s_1^{\varepsilon_1}\dots s_k^{\varepsilon_k} \overset{G}{=} \prod g_i p_{\alpha_i}^{\delta_i} g_i^{-1}, \quad p_{\alpha_i}\in P,\ g_i\in G,\ \delta_i\in\{\pm1\}.$$

To zaś znaczy, że wybierając $\bar{g_i} \in F_S$

którego obrazami w $G = F_S/N_R$ są g_i, mamy

$$s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k} \overset{F_S}{=} h \cdot \prod_i \bar{g_i}\, p_{\alpha_i}^{\delta_i}\, \bar{g_i}^{-1} \qquad \text{dla pewnego } h \in N_R.$$

Skoro prawa strona należy do $N_{R \cup P}$, to lewa też.

Zatem $s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k} = 1$ w $\langle S \mid R \cup P \rangle$. $\square$

PRZYKŁAD - ABELIANIZACJA GRUPY $\langle S|R\rangle = G$

$$G^{ab} = G/[G,G]$$

Komutant $[G,G]$ jest generowany, jako dzielnik normalny, przez

komutatory $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$: $g,h\in G$

czyli przez relacje $gh = hg$.

Ponieważ komutowanie dowolnej pary elementów jest

konsekwencją komutowania generatorów,

wystarczy dodać relacje postaci $s_1 s_2 = s_2 s_1$ $\quad s_1, s_2 \in S$

- np. $s_1 s_2^{-1} = s_2^{-1} s_1$ jest ~~równoważne~~ konsekwencją $s_2 s_1 = s_1 s_2$

  (domnożenie z lewej i prawej przez s_2^{-1})

- $\underbrace{s_1^{-1} s_2^{-1}}_{=(s_2 s_1)^{-1}} = \underbrace{s_2^{-1} s_1^{-1}}_{=(s_1 s_2)^{-1}}$ wynika z tego że

- jeśli generatory komutują, to dowolne pary słów na nich

  zbudowane też!

Zatem $\langle S|R\rangle^{ab} = \langle S \mid R \cup \{ss' = s's : s,s' \in S,\ s \neq s'\}\rangle$ □

WNIOSEK (z ćwiczeń) [z tego że $F_S^{ab} \cong \mathbb{Z}^S$]

$$\mathbb{Z}^S = \langle S \mid \{ss' = s's : s, s' \in S,\ s \neq s'\}\rangle$$