POSTAĆ NORMALNA SŁÓW

w produktach wolnych z amalgamacją



FAKT 1. Każdy element $u \in H \underset{\substack{A=B \\ \varphi}}{*} K$ jest reprezentowany

(1) słowem naprzemiennym $g_1 \cdots g_m$, $m \geq 0$,

$g_i, g_{i+1}$ należą do różnych spośród $H \setminus 1, K \setminus 1$ dla $i = 1, \dots, m-1$

(2) słowem $g_1$, $g_1 \in A$ lub $g_1 \in B$ lub słowem naprzemiennym zredukowanym $g_1 \cdots g_m$, $m \geq 1$,

(JASNE Z POPRZEDNICH)

reprezentowanie polega na wykonaniu iloczynu $\tilde{g}_1 \cdots \tilde{g}_m$ w $H *_{\varphi} K$ gdzie $\tilde{g}_i = i_H(g_i)$ lub $\tilde{g}_i = i_K(g_i)$

$g_i, g_{i+1} \in$ różnych spośród $H \setminus A, K \setminus B$

Dowód (2):

Jeśli np. w słowie naprzemiennym z (1) mamy $g_i \in A$, $g_i$ leży w środku, to $g_{i-1}, g_{i+1} \in K$. Bez zmiany wyniku iloczynu zastępujemy $g_i$ przez $g_i' = \varphi(g_i) \in B < K$, a następnie scalamy $g_{i-1} g_i' g_{i+1}$ przez pojedynczy element z $K$ (o ile $\neq 1$, bo jeśli $= 1$, to usuwamy całe i scalamy $g_{i-2} g_{i+2} \in H$, itd.)

To redukuje długość słowa naprzemiennego reprezentującego $u$.

Po osiągnięciu minimalnej długości słowa naprzemiennego, $g_1 \cdots g_d$,

jeśli $d \geq 2$ to mamy słowo naprzemienne zredukowane

jeśli $d = 1$ to albo naprzemienne zredukowane ($g_1 \in H \setminus A$ lub $g_1 \in K \setminus B$)

albo $g_1 \in A$ lub $g_1 \in B$. □

PRZYKŁAD. $H = \langle c \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z} \cong \langle d \mid \emptyset \rangle = K$

$A < H$, $A = \langle c^2 \rangle$, $B < K$, $B = \langle d^3 \rangle$

Obie podgrupy $A$ i $B$ izomorficzne z $\mathbb{Z}$.

Niech $\varphi : A \to B$, $\varphi(c^2) = d^3$, izomorfizm.

Wówczas $H \underset{\substack{A=B \\ \varphi}}{*} K = \langle c, d \mid c^2 = d^3 \rangle$

Słowo $c^3 d^{-5}$ jest naprzemiennie zredukowane,

ale $c^3 d^{-5} = c c^2 d^{-5} = c d^3 d^{-5} = c d^{-2}$

gdzie $cd^{-2}$ to inne słowo naprzemiennie zredukowane reprezentujące ten sam element

WNIOSEK. Reprezentacje elementów $H \underset{\substack{A=B \\ \varphi}}{*} K$ w postaci słów naprzemiennych zredukowanych nie jest jednoznaczne.

REPREZENTANTY WARSTW

$Y$ - wybrany zbiór reprezentantów prawych warstw $Ah : h \in H$, w $H$

(reprezentantem warstwy $A$ jest $1$).

$Z$ — ,, — $Bk : k \in K$, w $K$.

(— ,, — $B$ — ,, —).

FAKT 2. Każdy element $u \in H \underset{\substack{A=B \\ \varphi}}{*} K$ jest reprezentowany słowem w postaci normalnej (dla produktu z amalgamacją) czyli słowem postaci $p g_1 \cdots g_m$, $m \geq 0$,

④ $g_i, g_{i+1} \in$ różnych spośród $Y \setminus 1$, $Z \setminus 1$

② $g_1 \in Y \setminus 1 \Rightarrow p \in A$, $g_1 \in Z \setminus 1 \Rightarrow p \in B$

③ $m = 0 \Rightarrow p \in A$.

PRZYKŁAD. CIĄG DALSZY.

W produkcie $\langle c \mid \emptyset \rangle \underset{c^2=d^3}{*} \langle d \mid \emptyset \rangle$ możemy pisać

$$Y = \{1, c\}, \quad Z = \{1, d, d^2\}$$

Element $\underbrace{c^3}\,\underbrace{d^{-5}} = cd^{-2} = c^{-1}d = \underbrace{c^{-2}}_{\substack{p\\ \cap\\ A}}\ \underset{\substack{\cap\\ Y-1}}{\overset{q_1}{\overbrace{c}}}\ \underset{\substack{\cap\\ Z-1}}{\overset{q_2}{\overbrace{d}}}\ .$

# Dowód FAKTU 2

Wynika z teraz FAKTU 1 (2) – czyli reprezentacji słowem nieprzemiennym zred. $g_1 \cdots g_m$ lub słowem $g_1 \in A$ lub $g_1 \in B$

jeśli $u = g_1$, $g_1 \in A$ lub $g_1 = B$ to OK.

Zał. że $u = g_1 \cdots g_m$ słowo nieprzemienne zredukowane

i przyjmijmy $g_m \in H \setminus A$. Wówczas $g_m = a\overline{g_m}$

dla pewnego $a \in A$, $\overline{g_m} \in Y \setminus 1$ [$g_m \in A\overline{g_m}$ dla pewnego $\overline{g_m} \neq 1$]

- Jeśli $m = 1$, to koniec [$u = a\overline{g_1}$]
- Jeśli $m > 1$, zamieniamy $a \in A$ w $b = \varphi(a) \in B$ i mamy

  $u = g_1 \cdots g_{m-1} b \overline{g_m}$, [$g_{m-1} \in K \setminus B$]

  Mamy $g_{m-1} b \in K \setminus B$ (bo $g_{m-1} \in K \setminus B$)

  oraz $g_{m-1} b = b'\overline{g_{m-1}}$ gdzie $\overline{g_{m-1}} \in Z \setminus 1$, $b' \in B$ [$g_{m-1} b \in B\overline{g_{m-1}}$]

Kontynuując, dostajemy w końcu postać normalną. □

DODATKOWA OBSERWACJA:

Każde nieprzemienne zredukowane słowo ($g_1 \cdots g_m$) transformuje się do słowa w postaci normalnej $p\overline{g_1} \cdots \overline{g_m}$ mającego tę samą długość $m$ (literę $p$ traktujemy jak dekorację pierwszej istotnej litery $\overline{g_1}$)

TWIERDZENIE (o postaci normalnej w produkcie wolnym z amalgamacją)

Każdy element $u \in H \ast_{A \overset{\varphi}{=} B} K$ jest reprezentowany dokładnie jednym słowem w postaci normalnej.

UWAGA. W przypadku gdy $A = B = \{1\}$, czyli w przypadku czystego produktu wolnego, TWIERDZENIE pokrywa się z opisem w postaci nieprzemiennych słów!

(Podobnie na poprzednim wykładzie).

**WNIOSEK 1.** Niech $L = H \underset{\substack{A=B \\ \varphi}}{*} K = \langle S \cup T \mid D \cup E \cup \{a=\varphi(a) : a\in Q\}\rangle$

(1) Kanoniczne homomorfizmy $i_H : H \to L$, $i_K : K \to L$ (indukowane przez identyczności na $S$ i na $T$) są injektywne, a więc $H$ i $K$ kanonicznie utożsamiają się z podgrupami w $L$.

(2) Podgrupy $H, K < L$ mają przekrój: $H \cap K = i_H(A) = i_K(B)$.

Dowód (1):

Niech $h \in H$.

Jeśli $h \in A$, to postacią normalną $i_H(h) \in L$ jest $h$.

Jeśli $h \notin A$, to $h = py$ dla $p \in A$, $y \in Y \setminus 1$, jednoznacznie, i postacią normalną dla $i_H(h) \in L$ jest $py$.

Różne $h \in H$ dają różne postacie normalne dla obrazów $i_H(h)$, stąd injektywność $i_H$.

Dla $i_K$ podobnie. □

Dowód (2):

Postacie normalne elementów $h \in H$ i $k \in K$ pokrywają się $\iff$ $h \in A$, $k \in B$, $\varphi(h) = k$. Stąd teza. □

# WNIOSEK 2.

Nieprzemienne zredukowane słowa reprezentują nietrywialne elementy w produkcie wolnym z amalgamacją.

dowód:

Nieprzemienne zredukowane słowo $g_1 \cdots g_n$ długości $n \geq 1$

przekształca się do słowa w postaci normalnej $p\bar{g}_1 \cdots \bar{g}_n$ (o tym samym $n$), reprezentującego ten sam element z $H *_{A \cong B} K$.

Z jednoznaczności słów normalnych, to słowo reprezentuje element $\neq 1$. □

WNIOSEK 3 

$G$ grupa, $H, K < G$ podgrupy, $H \cap K = M$.

$G$ jest kanonicznie izomorficzna z produktem wolnym z amalgamacją $H \underset{\substack{M=M \\ id_M}}{*} K$ iff

(i) $H \cup K$ generuje $G$

(ii) każde słowo niepuste zredukowane (nad $H \setminus M$, $K \setminus M$) reprezentuje w $G$ element $\neq 1$.

Dowód:

W sytuacji jw. mamy homomorfizm surjektywny

$\sigma : H \underset{\substack{M=M \\ id_M}}{*} K \to G$ zadany identycznościami na $H \cup K$

Wystarczy pokazać, że $\sigma$ jest izomorfizmem.

Gdyby $\operatorname{Ker} \sigma \neq \{1\}$, mielibyśmy element $u \in H \underset{\substack{M=M \\ id_M}}{*} K$,

$u \notin K \cup M$ t.że. $\sigma(u) = 1$.

Ten $u$ miałby postać normalną $p g_1 \ldots g_m$, $m \geq 2$,

a więc byłby reprezentowany słowem niepustym zredukowanym

$\underset{\substack{\| \\ g_1'}}{(p g_1)} g_2 \cdots g_m$.

$\sigma(u) = 1$ oznacza, że słowo to w $G$ reprezentowałoby $1$,

wbrew założeniu (ii). $\square$

WNIOSEK 3

$G$ grupa, $H, K < G$ podgrupy, $H \cap K = M$.

$G$ jest (kanonicznie) izomorfna z produktem wolnym z amalgamacją $H \underset{\substack{M = M \\ id_M}}{*} K$ iff

(i) $H \cup K$ generuje $G$

(ii) każde słowo nieprzemienne zredukowane (nad $H \setminus M$, $K \setminus M$) reprezentuje w $G$ element $\neq 1$.

Dowód:

W sytuacji jak wyżej mamy homomorfizm surjektywny

$$\sigma : H \underset{\substack{M = M \\ id_M}}{*} K \to G$$ zadany identycznościami na $H \cup K$

Wystarczy pokazać, że $\sigma$ jest izomorfizmem.

Gdyby $\operatorname{Ker} \sigma \neq \{1\}$, mielibyśmy element $u \in H \underset{\substack{M = M \\ id_M}}{*} K$,

$u \notin K \cup H$ t.że. $\sigma(u) = 1$.

Ten $u$ miałby postać normalną $p g_1 \dots g_m$, $m \geq 2$,

a więc byłby reprezentowany słowem nieprzemiennym zredukowanym

$$\underbrace{(p g_1)}_{= g_1'} g_2 \cdots g_m .$$

$\sigma(u) = 1$ oznacza, że słowo to w $G$ reprezentowałoby $1$,

wbrew założeniu (ii). $\square$

# Dowód [SZKIC] (tw. o postaci normalnej dla produktu wolnego z amalgamacją)

Niech $\Omega = \{$słowa w postaci normalnej$\}$

Dla $h \in H$ definiujemy permutację $\sigma_h \in Sym(\Omega)$

[IDEA: mnożymy z lewej przez $h$ i doprowadzamy w jednoznaczny sposób do postaci normalnej]:

niech $u = pg_1 \cdots g_m \in \Omega$

0°. $m = 0$, $u = p$, $p \in A$

- gdy $h \in A$ $\quad \sigma_h(p) := hp = p' \in A \subset \Omega$
- gdy $h \notin A$, $\quad hp \notin A$, $hp \in A\bar{h}$ dla $\bar{h} \in Y-1$, $hp = p'\bar{h}$, $p' \in A$

$$\sigma_h(p) := p'\bar{h} \in \Omega$$

dla $m \geq 1$ podprzypadki

1°. $\underline{g_1 \in Y-1,\ h \in A}$, wtedy $hp = p' \in A$

$$\sigma_h(pg_1 \cdots g_m) = p'g_1 \cdots g_m \in \Omega$$

2°. $\underline{g_1 \in Y-1,\ h \notin A,\ hpg_1 = p' \in A,\ m = 1}$

$$\sigma_h(pg_1) := p' \in \Omega$$

3°. $\underline{g_1 \in Y-1,\ h \notin A,\ hpg_1 = p' \in A,\ m > 1}$

niech $p'' = \varphi(p') \in B$, $\sigma_h(pg_1g_2 \cdots g_m) = p''g_2 \cdots g_m \in \Omega$

4°. $\underline{g_1 \in Y-1,\ h \notin A,\ hpg_1 \notin A}$

$hpg_1 \in A\bar{h}$ dla $\bar{h} \in Y-1$,

$hpg_1 = p'\bar{h}$ dla $p' \in A$

$\sigma_h(u) = p'\bar{h}g_2 \cdots g_m$

5°. $\underline{g_1 \in Z-1,\ h \in A}$ $\quad$ wtedy $p \in B$

niech $\varphi(h) = b \in B$, $\quad bp = p' \in B$

$$\sigma_h(pg_1 \cdots g_m) := p'g_1 \cdots g_m \in \Omega$$

6°. $\underline{g_1 \in Z-1,\ h \notin A}$ $\quad$ niech $\varphi^{-1}(p) = a \in A$, $ha = a'\bar{h}$ dla $a' \in A, \bar{h} \in Y-1$

$$\sigma_h(pg_1 \cdots g_m) = a'\bar{h}g_1 \cdots g_m \in \Omega$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że

- $\sigma_{h_1}\sigma_{h_2} = \sigma_{h_1h_2} \quad \forall h_1,h_2 \in H$ [POMIJAM]
- stąd $\sigma_h : \Omega \to \Omega$ bijekcja

oraz $h \mapsto \sigma_h$ jest homomorfizmem $\sigma : H \to Sym(\Omega)$

---

Podobnie $\forall k \in K$ określamy $\tau_k : \Omega \to \Omega$

dostajemy homomorfizm $\tau : K \to Sym(\Omega)$

---

Ponieważ $\sigma|_A = \tau\circ\varphi$ $\left(\forall a \in A \ \sigma_a = \tau_{\varphi(a)}\right)$ [SPRAWDZENIE POMIJAM]

z uniwersalności otrzymujemy homomorfizm $\alpha : H \underset{\substack{A=B\\ \varphi}}{*} K \to Sym(\Omega)$

t.że $\alpha\circ i_H = \sigma$, $\alpha\circ i_K = \tau$

W szczególności, dla niepustych słów mamy

$$\alpha(h_1k_1 \cdots h_nk_n) = \sigma_{h_1}\circ\tau_{k_1}\circ\dots\circ\sigma_{h_n}\circ\tau_{k_n} \in Sym(\Omega)$$

OBSERWACJA.

Dla $u = 1g_1\cdots g_m \in \Omega$, $g_1 \in Z\setminus 1$, oraz dla $h \in Y\setminus 1$ mamy

$\sigma_h(1g_1\cdots g_m) = 1hg_1\cdots g_m \in \Omega$. | natomiast dla $p \in B$ mamy $\tau_p(1g_1\cdots g_m) = pg_1\cdots g_m$

Podobnie gdy $g_1 \in Y\setminus 1$, $k \in Z\setminus 1$ to

$\tau_k(1g_1\cdots g_m) = 1kg_1\cdots g_m \in \Omega$ | natomiast dla $p \in A$ mamy $\sigma_p(1g_1\cdots g_m) = pg_1\cdots g_m$

WNIOSEK. Jeśli $pg_1\cdots g_m$ jest w postaci normalnej, to

$\alpha(pg_1\cdots g_m)(\underset{\substack{\cap\\ \Omega}}{1}) = pg_1\cdots g_m \in \Omega$. Zatem permutacje

$\alpha(pg_1\cdots g_m)$ odpowiadające wszystkim słowom $pg_1\cdots g_m$ w postaci normalnej

są różne. Stąd elementy w $H \underset{\substack{A=B\\ \varphi}}{*} K$ reprezentowane przez różne

słowa są różne. Stąd jedyność. $\square$

LEMAT O PING-PONGU
DLA PRODUKTÓW WOLNYCH Z AMALGAMACJĄ.

$H, K < \mathrm{Sym}(X)$, $H \cap K = J$

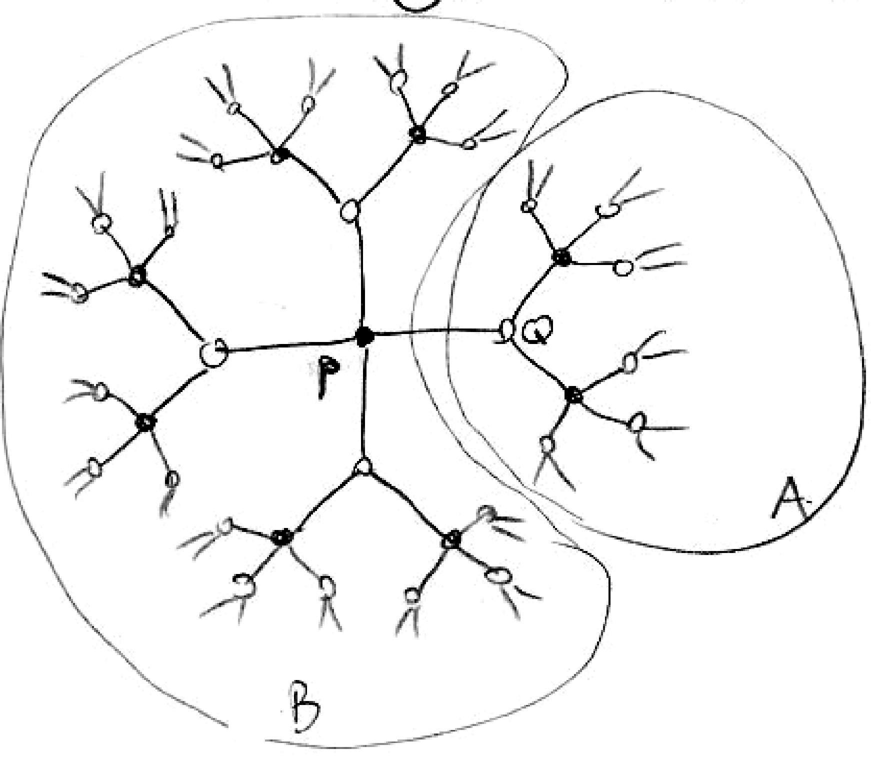
$A, B \subset X$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$

$h(A) \subsetneq B \quad \forall h \in H \setminus J$, $k(B) \subsetneq A \quad \forall k \in K - J$

Wówczas $\Gamma = \langle H \cup K \rangle < \mathrm{Sym}(X)$
jest izomorficzne z $H \ast_J K$.

Dowód: taki sam jak dla grupy wolnej
z użyciem postaci normalnej dla elementów z $H \ast_J K$. $\square$

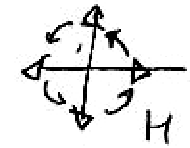
PRZYKŁADY. (1) X - drzewo (3,4)-regularne, $H \cong \mathbb{Z}_4$ - „obroty" wokół P
$K \cong \mathbb{Z}_3$ - „obroty" wokół Q
$H \cap K = \{1\}$




$\langle H \cup K \rangle \cong H \ast K$
$\cong \mathbb{Z}_4 \ast \mathbb{Z}_3$

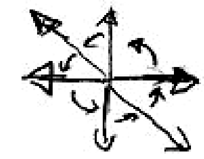
② $X = \mathbb{R}^2$, $H, K < SL_2\mathbb{Z} \curvearrowright X$ liniowo

$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_4 = \langle x \mid x^4 \rangle$$



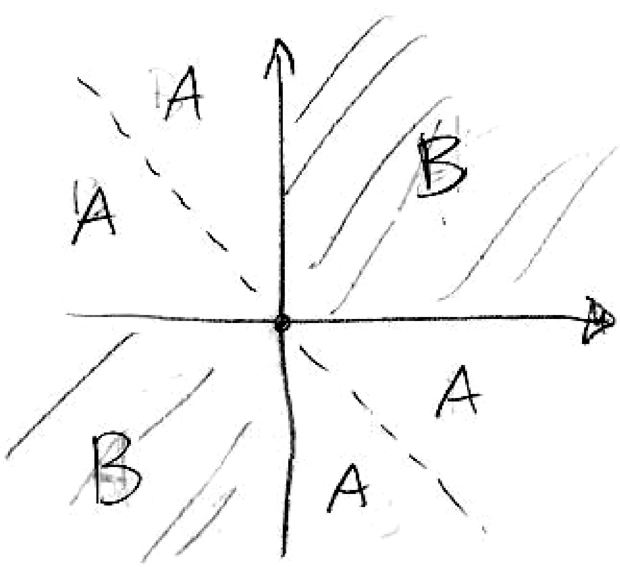
H

$$K = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_6 = \langle y \mid y^6 \rangle$$



K

$$H \cap K = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2 = \langle x^2 \rangle = \langle y^3 \rangle$$




$$B = \{(x,y) : x \cdot y > 0\}$$

$$A = \{(x,y) : x \cdot y < 0,\ x \neq -y\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_4 \underset{\mathbb{Z}_2}{*} \mathbb{Z}_6$$

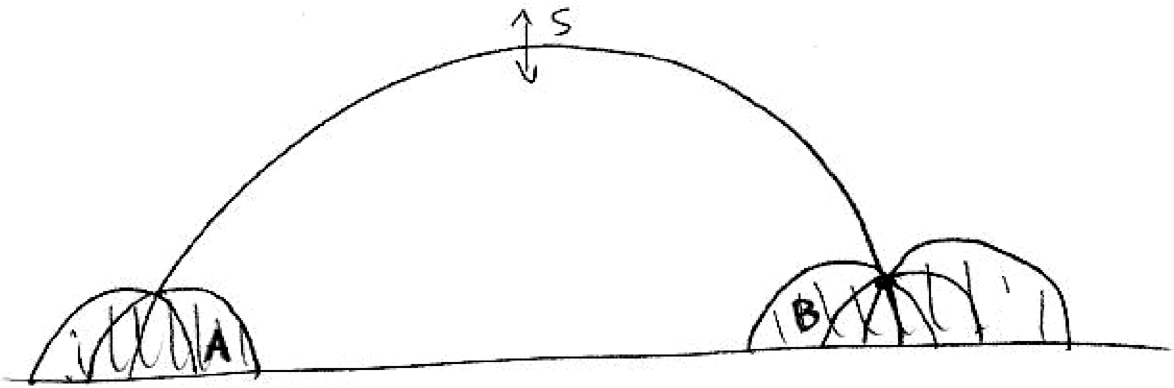
$$\cong \langle x, y \mid x^4, y^6, x^2 = y^3 \rangle$$

UWAGA. W istocie $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ generują całe $SL_2\mathbb{Z}$,

więc $SL_2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4 \underset{\mathbb{Z}_2}{*} \mathbb{Z}_6$.

3

15




$H \cong D_3 = \langle x, y \mid x^2, y^2, (xy)^3 \rangle$ $\qquad$ $K \cong D_4 = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^4$

$H \cap K = \langle s \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ $\qquad$ np. $a = s$, $x = s$

$H \cup K$, czyli $x, y, a, b$, generuje $H \underset{\langle s \rangle}{*} K = \langle x, y, a, b \mid x^2, y^2, (xy)^3,$
$a^2, b^2, (ab)^4, a = x \rangle$

podgrupę w $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

1

# ZASTOSOWANIE PRODUKTU Z AMALGAMACJĄ:

- grupy z nierozstrzygalnym problemem słów.

(1) Istnieją podzbiory $X \subset \mathbb{N}$ z nierozstrzygalnym problemem przynależności do $X$

(bo algorytmów jest przeliczalnie wiele)

(2) Niech $X \subset \mathbb{N}$ ~~z nierozstrz.~~ j.w.

Rozważmy $G_X = \langle a,b,c,d \mid \{ b^i a b^{-i} = d^i c d^{-i} : i \in X \} \rangle$

Oznaczmy:

$H = \langle a, b \mid \phi \rangle \cong F_2$

$K = \langle c, d \mid \phi \rangle \cong F_2$

$b^i a b^{-i} b^j a b^{-j} = b^i a b^{j-i} a b^j$,

więc dla $i \neq j$ środkowe $a$ nie ulegną skróceniu

$A < H$, $A = \langle b^i a b^{-i} : i \in X \rangle$

$A \cong F_\infty$, zbiór $\{ b^i a b^{-i} : i \in X \}$ jest bazą

$B < K$, $B = \langle d^i c d^{-i} : i \in X \rangle$, $B \cong F_\infty$ ....

$\varphi : A \to B$, $\varphi(b^i a b^{-i}) = d^i c d^{-i}$, izomorfizm

Wtedy: $G_X \cong H \underset{\substack{A=B \\ \varphi}}{*} K$

4 gen

$\infty$ wiele relacji

LEMAT. W grupie $G_X$ problem słów (na generatorach a, b, c, d) jest nierozstrzygalny.

Dowód:

Zauważmy, że $b^i a b^{-i} d^i c^{-1} d^{-i} \overset{G_X}{=} 1 \iff i \in X$

bo jeśli $i \notin X$ to $b^i a b^{-i} \notin A$, $d^i c^{-1} d^{-i} \notin B$

czyli słowo $\underset{\substack{\uparrow \\ H \setminus A}}{(b^i a b^{-i})}\underset{\substack{\uparrow \\ K \setminus B}}{(d^i c^{-1} d^{-i})}$ jest naprzemienne zredukowane

czyli reprezentuje element $\neq 1$ w $G_X$.

Gdyby problem słów w $G_X$ był rozstrzygalny to

$\forall i \in \mathbb{N}$ rozstrzygamy czy $b^i a b^{-i} d^i c^{-1} d^{-i} \overset{G_X}{=} 1$

czyli rozstrzygamy czy $i \in X$ czy nie, sprzeczność. $\square$

TWIERDZENIE. Istnieje grupa skończenie prezentowalna z nierozstrzygalnym problemem słów.

SZKIC DOWODU:

(1°) Istnieje podzbiór $X \subset \mathbb{N}$ który są algorytmicznie wypisywalne (recursively enumerable), ale dla którego problem przynależności do $X$ nie jest rozstrzygalny.

(2°) Dla takiego zbioru $X$ grupa $G_X$ jest rekurencyjnie prezentowalna (sk. zbiór gen, zb. relacji algorytmicznie wypisywalny).

(3°) Z Tw Higmana, $G_X$ [jak każda grupa rekurencyjnie prezentowalna] zanurza się jako podgrupa w pewnej grupie skończenie prezentowalnej $U$.

4°. Grupa $U$ ma nierozstrzygalny problem słów.

Gdyby miało rozstrzygalny, to problem słów w $G_x$ też byłby rozstrzygalny, bo

- $w$ – słowo na generatorach $G_x$
- każdy generator z $w$ zastępujemy wyr. go słowem na generatorach grupy $U$ otrzymując słowo $w'$
  (to się robi algorytmicznie)
- Mamy $w' \overset{U}{=} 1 \iff w \overset{G_x}{=} 1$

Zatem rozstrzygając czy $w' \overset{U}{=} 1$ czy nie rozstrzygamy tym samym czy $w \overset{G_x}{=} 1$ czy nie. □