HNN-rozszerzenie. [B. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, 1949]

Dane: G - grupa ; $A, B < G$; $\varphi : A \to B$ izomorfizm

Chcemy: rozszerzyć grupę G, za pomocą dodatkowego możliwie niezależnego od G elementu p, do grupy E w której p sprzęga A do B poprzez φ, czyli $p^{-1} a p = \varphi(a)$ $\forall a \in A$.

Prezentacja: $E = \langle G, p \mid p^{-1} a p = \varphi(a) : a \in A \rangle$

[równoważnie $\langle G, p \mid p^{-1} a p = \varphi(a) : a \in S_A \rangle$
dla dowolnego zbioru S_A generującego A]

Oznaczenie: $G *_{\varphi}$ (samo-zamalgamowanie za pomocą φ)

UWAGA: Homomorfizm $G*_{\varphi} \to \mathbb{Z}$, $G \to 0$, $p \mapsto 1$

pokazuje że p ma nieskończony rząd w $G*_{\varphi}$.

Nie jest jasne czy G zanurza się w $G*_{\varphi}$.

To, i inne własności HNN-rozszerzeń, pokażemy wyprowadzając pojęcie normalnej w $G*_{\varphi}$.

DYGRESJA TOPOLOGICZNA

o analogii pomiędzy HNN-rozszerzeniem a produktem wolnym z amalgamacją.

1°. G_1, G_2 grupy, $A_1 < G_1$, $A_2 < G_2$ podgrupy, $\varphi : A_1 \to A_2$ izomorfizm.

Interesuje nas $G_1 \underset{\substack{A_1 = A_2 \\ \varphi}}{*} G_2$.

FAKT TOPOLOGICZNY.

X_i przestrzeń z $\pi_1 X_i = G_i$, $i = 1, 2$

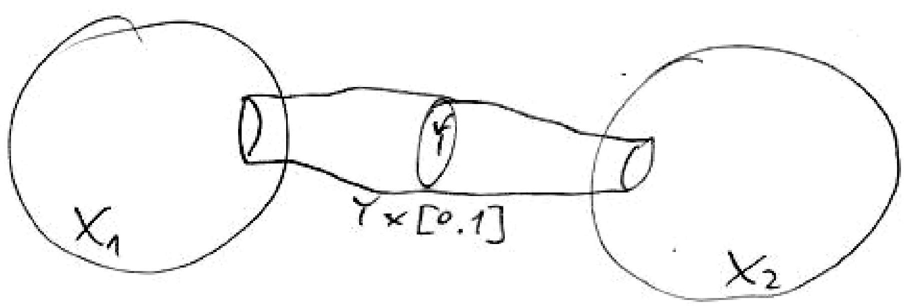
Y przestrzeń z $\pi_1 Y = A_1$

$f_i : Y \to X_i$ odwzorowania ciągłe t.że

$(f_i)_* : \pi_1 Y \to \pi_1 X_i$ izomorfizm na A_i, $i = 1, 2$,

oraz $(f_1)_*^{-1} (f_2)_* : A_1 \to A_2$ pokrywa się z φ.

Niech $Z = X_1 \cup_{f_1 \times 0} Y \times [0,1] \cup_{f_2 \times 1} X_2$



Wówczas $\pi_1 Z = G_1 \underset{\substack{A_1 = A_2 \\ \varphi}}{*} G_2$. $\square$

2°. G grupa, $A, B < G$ podgrupy, $\varphi : A \to B$ izomorfizm

X t.że $\pi_1 X = G$

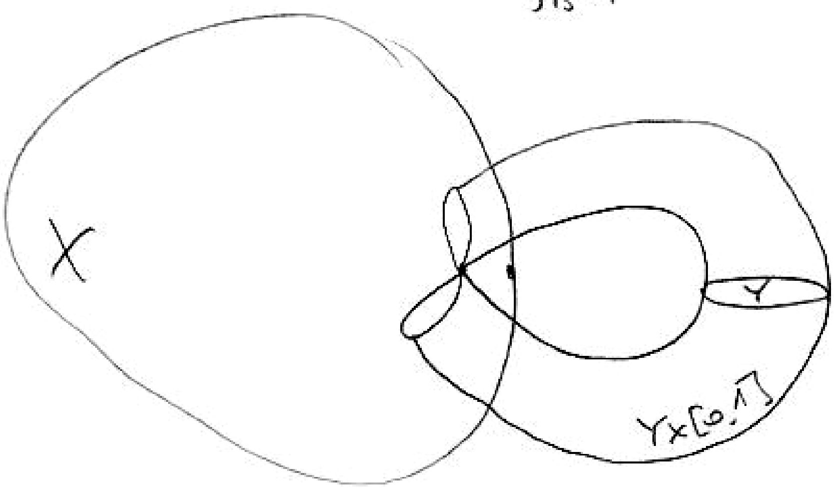
Y t.że $\pi_1 Y = A$

$f_A : Y \to X$ t.że $(f_A)_* : \pi_1 Y \to \pi_1 X$ izomorfizm na A

$f_B : Y \to X$ $(f_B)_*$ izomorfizm na B

ponadto $(f_A)_*^{-1}(f_B)_* : A \to B$ pokrywa się z φ

Niech $Z = X \cup_{\substack{f_A \times 0 \\ f_B \times 1}} Y \times [0,1]$.



Wniosek $\pi_1 Z = G \ast_\varphi$. $\square$

Oba fakty wynikają z Tw. van Kampena.

POSTAĆ NORMALNA W G^*_φ.

1. p-wyrażenie $g_0 p^{\varepsilon_1} g_1 p^{\varepsilon_2} g_2 \dots p^{\varepsilon_n} g_n$ $g_i \in G$ (dopuszczamy $g_i = 1$)
$\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$

Każdy element z G^*_φ przedstawia się za pomocą p-wyrażenia.

2. p-redukcje (1) $p^{-1} g_i p = b$ gdy $g_i = a \in A$, $\varphi(a) = b \in B$
(2) $p g_i p^{-1} = a$ gdy $g_i = b \in B$, $\varphi(a) = b$

- zmniejsza się liczba wystąpień p
- forma p-zredukowana:

$p g_i p^{-1} \rightsquigarrow g_i \notin B$
$p^{-1} g_i p \rightsquigarrow g_i \notin A$

$p g_i p$ oraz $p^{-1} g_i p^{-1} \rightsquigarrow g_i$ dowolne, nawet $g_i = 1$

- Każdy element z G^*_φ przedstawia się za pomocą p-wyrażenia p-zredukowanego
- przedstawienie nie jest jednoznaczne bo np.
dzięki równości $ap = pb$ $(b = \varphi(a))$
mając $g_i = b g_i'$
możemy zastąpić $g_{i-1} p g_i = g_{i-1} p b g_i' = g_{i-1} a p g_i'$

przez $\underbrace{(g_{i-1} a)}_{g_{i-1}'} p g_i'$

jeśli g_{i-1} jest poprzedzone przez p, to OK.
jeśli przez p^{-1}, to $g_{i-1} \notin A$, ale $g_{i-1}' = g_{i-1} a \notin A$ także

3. normalizacja wyrażeń p-redukowanych

- Y - reprezentanty prawych warstw A w G, $1 \in Y$

  Z - —— " —— B w G, $1 \in Z$

- Korzystając z równości

$$p^{-1}a = bp^{-1}$$

$$pb = ap \qquad \text{dla } b = \varphi(a)$$

iterujemy operacje

$$p^{-1}g_i = p^{-1}a\overline{g_i} = bp^{-1}\overline{g_i}, \quad \overline{g_i} \in Y$$

$$pg_j = pb\overline{g_j} = ap\overline{g_j}, \quad \overline{g_j} \in Z$$

od prawej do lewej, jak długo się da

- otrzymujemy postać normalną p-wyrażenia

$g_0 p^{\varepsilon_1} g_1 \dots p^{\varepsilon_m} g_m$, w której

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon_i = 1 \rightsquigarrow g_i \in Z \\ \varepsilon_i = -1 \rightsquigarrow g_i \in Y \\ g_i = 1 \rightsquigarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ g_0 \in G \text{ - dowolne} \end{array}\right.$$

- każdy element z G^*_φ przedstawia się za pomocą p-wyrażenia w postaci normalnej.

TW. Każdy element z grupy G^*_φ ma jednoznaczne przedstawienie za pomocą p-wyrażenia w postaci normalnej.

Dowód: Niech Ω - zbiór p-wyrażeń w postaci normalnej. Skonstruujemy ~~homomorfizm~~ reprezentację grupy G^*_φ w grupie permutacji $\mathrm{Sym}(\Omega)$.

Krok 1. Dla $g \in G$ określmy

$$\Theta(g)(g_0 p^{\varepsilon_1} g_1 \cdots p^{\varepsilon_n} g^n) = (g g_0) p^{\varepsilon_1} g_1 \cdots p^{\varepsilon_n} g_n .$$

Θ jest homomorfizmem $G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$.

Krok 2. Określmy $\psi(p): \Omega \to \Omega$

przez dopisanie p z lewej oraz redukcję i normalizację.

Dla $\overset{w=}{g_0} p^{\varepsilon_1} g_1 \cdots p^{\varepsilon_n} g_n \in \Omega$ mamy do 3 przypadki:

1°. $\varepsilon_1 = 1$, $p g_0 = p \underset{\overset{\Uparrow}{Z}}{b} \overline{g_0} = a p \overline{g_0}$

$$\psi(p)(w) = a p \overline{g_0} p g_1 \cdots p^{\varepsilon_n} g_n \in \Omega$$

2°. $\varepsilon_1 = -1$, $p g_0 = p \underset{\overset{\Uparrow}{Z}}{b} \overline{g_0} = a p \overline{g_0}$, $\overline{g_0} \neq 1$

$$\psi(p)(w) = a p \overline{g_0} p^{-1} g_1 \cdots p^{\varepsilon_n} g_n \in \Omega$$

3°. $\varepsilon_1 = -1$, $p g_0 = p b \overline{g_0} = a p \overline{g_0}$, $\overline{g_0} = 1$ (czyli $g_0 = b \in B$)

wtedy $p g_0 p^{-1} g_1 = a p p^{-1} g_1 = a g_1$ więc

$$\psi(p)(w) = (a g_1) p^{\varepsilon_2} g_2 \cdots p^{\varepsilon_n} g_n \in \Omega$$

Podobnie określamy $\psi(p^{-1}): \Omega \to \Omega$ (pomijam analogiczne szczegóły).

Sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, że

$$\psi(p)\,\psi(p^{-1}) = \psi(p^{-1})\,\psi(p) = id_{\Omega}$$

skąd $\psi(p), \psi(p^{-1}) \in Sym(\Omega)$, $\psi(p^{-1}) = [\psi(p)]^{-1}$.

Stąd dostajemy homomorfizm $\psi: \mathbb{Z} \to Sym(\Omega)$.

Krok 4. Rozważmy $\theta * \psi : G * \underset{\langle p\rangle}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}}} \to Sym(\Omega)$.

Sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, że $\forall a \in A$

$$\theta * \psi\,(p^{-1} a p) = \theta * \psi\,(\varphi(a))$$

Czyli że relacje z G^*_φ są posyłane przez $\theta * \psi$ w $\overset{1}{\overset{\shortparallel}{id_{\Omega}}} \in Sym(\Omega)$

Zatem $\theta * \psi$ określa homomorfizm $\overline{\theta * \psi} : G^*_\varphi \to Sym(\Omega)$.

Krok 5

Sprawdzamy, że

$$\underbrace{\theta * \psi\,(g_0 p^{\varepsilon_1} g_1 \cdots p^{\varepsilon_n} g_n)}_{\substack{\uparrow \\ Sym(\Omega)}}(\underset{\substack{\uparrow \\ \Omega}}{1}) = \underbrace{g_0 p^{\varepsilon_1} g_1 \cdots p^{\varepsilon_n} g_n}_{\substack{\uparrow \\ \Omega}}$$

Oznacza to, że elementy z G^*_φ reprezentowane różnymi formami normalnymi są reprezentowane w $Sym(\Omega)$ przez różne permutacje (o różnych wartościach na elemencie $1 \in \Omega$). Zatem elementy te są różne w G^*_φ.

$\square$

WNIOSKI:

(1) G zanurza się w G_φ^*, tzn. homomorfizm $G \to G_\varphi^*$ zadany przez $g \mapsto g$ jest różnowartościowy.

d-d: elementy z G mają postać normalną g_0. □

(2) LEMAT BRITTONA. p-zredukowane wyrażenie $g_0 p^{\varepsilon_1} g_1 \dots p^{\varepsilon_m} g_m$, dla $m \geq 1$, reprezentuje element w G_φ^* różny od 1.

d-d: normalizacja p-zredukowanego wyrażenia nie zmienia jego długości. □

UWAGA. Konstrukcję HNN-rozszerzenia można uogólnić na przypadek rodziny $\{\varphi_i : A_i \to B_i\}_{i\in I}$ izomorfizmów podgrup G, jako grupy $\langle G, \{p_i\}_{i\in I} \mid \{p_i^{-1} a p_i = \varphi_i(a) : i \in I, a \in A_i\} \rangle$.

Otrzymujemy analogiczną postać normalną.

KONSTRUKCJE GRUP Z ZASTOSOWANIEM HNN-ROZSZERZENIA.

TW [Higman, Neumann, Neumann] Dla dowolnej grupy przeliczalnej P istnieje grupa G o dwóch generatorach (2-generowalna) zawierająca P jako podgrupę.

TW. Dowolna grupa przeliczalna P jest podgrupą w pewnej grupie 2-generowalnej.

TW. Istnieje continuum parami nieizomorficznych grup 2-generowalnych.

UWAGA: np. $P=\mathbb{Q}$ albo $P=\bigoplus_{p \text{ pierwsze}} \mathbb{Z}_p$, itp.

DOWÓD:

Niech $P=\langle S \mid R\rangle$ gdzie $S=\{s_1,s_2,\dots\}$ przeliczalny.

Niech $F=\langle a,b \mid -\rangle$ oraz $L=P*F$.

- Rozważ układ $B=\langle a, b^{-1}ab, b^{-2}ab^2, \dots\rangle$.

  Wiemy że generuje on w sposób wolny podgrupę wolną $F_B<F<L$.

- Podobnie układ $A=\langle b, s_1a^{-1}ba, s_2a^{-2}ba^2, s_3a^{-3}ba^3, \dots\rangle$

  w sposób wolny generuje podgrupę $F_A<L$

  (bo obrazy tych elementów przez homomorfizm $P*F \to F$ zabijający P ~~tworzą~~ generują w sposób wolny podgrupę w F).

- Niech $\varphi: F_A \to F_B$ izomorfizm zadany przez

$$\varphi(b)=a$$
$$\varphi(s_1a^{-1}ba)=b^{-1}ab$$
$$\varphi(s_2a^{-2}ba^2)=b^{-2}ab^2$$
$$\vdots$$

i rozważ HNN-rozszerzenie

$$L*_\varphi=\langle a,b,S,t \mid R, t^{-1}bt=a, t^{-1}s_1a^{-1}ba=b^{-1}ab, \dots\rangle.$$

Pokażemy, że $G=L*_\varphi$ jest OK.

• 2-generowalność L^*_φ.

Każda z relacji $t^{-1} s_k a^{-k} b a^k t = b^{-k} a b^k$ przepisujemy jako

$s_k = t b^{-k} a b^k t^{-1} a^{-k} b^{-1} a^k$.

Stąd generatory z S wyrażają się przez a, b, t

Czyli L^*_φ jest generowana przez a, b, t.

Ponadto $a = t^{-1} b t$, więc L^*_φ jest generowane przez b, t.

• $P < L^*_\varphi$ bo

$P < P * F = L < L^*_\varphi$. □

Powyższa konstrukcja daje:

TW. WZMOCNIONE: Dla dowolnej grupy przeliczalnej P istnieje grupa G o dwóch generatorach, zawierająca P jako podgrupę, i taka, że każdy element skończonego rzędu w G jest sprzężony z elementem z P.

FAKT. Każdy element skończonego rzędu w HNN-rozszerzeniu G^*_φ jest sprzężony z pewnym elementem (sk. rzędu) z $G < G^*_\varphi$.

DOWÓD:

Element $g \in L^*_\varphi$ skończonego rzędu jest sprzężony w L^*_φ z elementem $g' \in L < L^*_\varphi$ (mającym ten sam skończony rząd).

Dalej, g' jest sprzężony w $L = P * F$ z elementem g'' należącym do P lub do F.

Ponieważ g'' ma ten sam skończony rząd, nie może należeć do F, więc $g'' \in P$. Ponadto g jest sprzężony w L^*_φ z g''. □

FAKT. Każdy element skończonego rzędu w $G \underset{A \cong B}{*} H$ jest sprzężony z pewnym elementem (sk. rzędu) z

[Tw. Higmana]

WNIOSEK. Istnieje continuum parami nieizomorficznych grup 2-generowanych.

DOWÓD:

1°. Więcej nie, bo każda z nich ma postać

$\langle a, b \mid R \rangle$ gdzie R podzbiór przeliczalnego zbioru wszystkich słów nad $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$

2°. Niech Z dowolny podzbiór zbioru liczb pierwszych, i niech $P_Z = \bigoplus_{p \in Z} \mathbb{Z}_p$ - grupa przeliczalna.

- WŁASNOŚĆ. P_Z zawiera element rzędu pierwszego $p \iff p \in Z$.
- Niech G_Z grupa 2-generowana jak ze Wzmocnionego Tw zawierająca P_Z.

  Skończone rzędy elementów z G_Z są takie same jak w P_Z, więc

  G_Z zawiera element rzędu pierwszego $p \iff p \in Z$.
- Stąd grupy G_Z są parami nieizomorficzne. $\square$