

Parkietaże i grupy symetrii wzorów płaskich
Lista 1. Parkietaże wielokątowe i archimedesowe.

Zadania o wielokątach foremnych

1. Czy pole kwadratowej płytki jest
 - (a) ponad dwukrotnie większe od pola trójkątnej równobocznej płytki o boku tej samej długości;
 - (b) ponad dwukrotnie mniejsze od pola sześciokątnej foremnej płytki o boku tej samej długości?
2. Jaki jest stosunek pól foremnej płytki 8-kątnej i 6-kątnej o tej samej długości boku.
3. 8-kąt foremny wpisano w kwadrat o boku a w taki sposób, że co drugi bok 8-kąta jest zawarty w boku kwadratu. Oblicz długość b boku tego 8-kąta, a także odległość d wierzchołka kwadratu od najbliższych wierzchołków 8-kąta. Zrób analogiczne zadanie dla 12-kąta foremnego wpisanego w sześciokąt foremny.
4. 12-kąt foremny wpisano w kwadrat o boku a w taki sposób, że cztery boki tego 12-kąta (co trzeci bok) są zawarte w bokach kwadratu. Oblicz długość d boku tego 12-kąta. Zrób też analogiczne zadanie dla dwunastokąta foremnego wpisanego w trójkąt równoboczny.
5. Wiadomo, że sześciokąt foremny można wyparkietować trójkątami równobocznymi o bokach tej samej długości co boki sześciokąta. Znajdź 2 sposoby wyparkietowania w taki sposób, wielokątami foremnymi być może kilku różnych rodzajów, 12-kąta foremnego. Czy któryś z tych parkietaży 12-kąta jest fragmentem jakiegoś parkietażu Archimedesowego?
6. Uzasadnij, że dla n różnego od 6 i 12, żadnego n -kąta foremnego nie da się wyparkietować mniejszymi wielokątami foremnymi o bokach tej samej długości co boki tego n -kąta. WSKAZÓWKA: ustal jakie wielokąty parkietażu mogą się spotykać w wierzchołku brzegowym n -kąta tworząc w sumie kąt mniejszy niż 180° .

Zadania o parkietażach wielokątowych

7. Wskaż wszystkie osie symetrii i wszystkie środki obrotowej symetrii we wszystkich parkietażach foremnym i półforemnym.
8. Podaj przykład parkietażu wielokątowego o jednakowych klepkach w przypadku gdy te klapki mają kształt: (a) równoległoboku, (b) trapezu, (c) deltoidu - czworokąta o kształcie latawca, (d) dowolnego trójkąta, (e) dowolnego czworokąta wypukłego, (f) pięciokąta, (g) sześciokąta nieforemnego, (h) czworokąta niewypukłego.
9. Dany jest dowolny pięciokąt $ABCDE$ mający
 - oś symetrii przechodzącą przez wierzchołek D ,
 - kąty proste przy wierzchołkach E i C ,
 - cztery boki tej samej długości: $|BC| = |CD| = |DE| = |EA|$.
 - (1) Jaki zakres wartości może przyjmować miara kąta przy wierzchołku D w takim pięciokącie?
 - (2) Uzasadnij, że dowolnym takim pięciokątem da się wyparkietować całą płaszczyznę w sposób wielokątowy.

WSKAZÓWKA: uzasadnij najpierw, że oś symetrii tego pięciokąta (po przedłużeniu poza wierzchołek D) tworzy z bokami CD i DE kąty równe kątom przy wierzchołkach A i B pięciokąta; wykorzystaj tę informację do konstrukcji parkietazu.

Zadania o parkietazach archimedesowych i innych

10. Pokaż, że każda z następujących czterech figur wierzchołkowych z wielokątów foremnych rozszerza się do wielokątowego, ale nie Archimedesowego, parkietazu całej płaszczyzny wielokątami foremnymi: $3 - 3 - 4 - 12$, $3 - 4 - 3 - 12$, $3 - 3 - 6 - 6$, $3 - 4 - 4 - 6$.
11. Uzasadnij, że następujące figury wierzchołkowe z wielokątów foremnych nie rozszerzają się do żadnego wielokątowego parkietazu całej płaszczyzny wielokątami foremnymi: $3 - 7 - 42$, $3 - 8 - 24$, $3 - 9 - 18$, $3 - 10 - 15$, $4 - 5 - 20$, $5 - 5 - 10$.
WSKAZÓWKA: wykorzystaj listę wszystkich potencjalnych figur wierzchołkowych utworzonych z wielokątów foremnych.
12. Wykaż, że parkietaz Archimedesowy $4 - 8 - 8$ jest jedynym parkietazem wielokątowym z wielokątów foremnych posiadającym 8-kątną klepkę.
WSKAZÓWKA: jak w poprzednim zadaniu.
13. *Parkietaz dualny* (względem wyjściowego parkietazu wielokątowego o wszystkich klepkach foremnym) to parkietaz, którego wierzchołkami są środki klepek wyjściowego parkietazu, zaś krawędziami są odcinki łączące środki klepek mających wspólny bok. Narysuj i przeanalizuj parkietaze dualne do wszystkich parkietazy foremnym i półforemnym. Które spośród tych parkietazy dualnych nie są parkietazami odbiciowymi?
14. Wyznacz kąty i długości boków pięciokątnej klepki parkietazu dualnego do półforemnego parkietazu $4-3-4-3-3$.
15. Bardzo duży plac wyłożono płytkami tworzącymi parkietaz półforemny. Jaka jest przybliżona proporcja liczby płytek poszczególnych rodzajów położonych na tym placu? Znajdź odpowiedź dla wszystkich typów parkietazy półforemnym.
16. Plac o powierzchni 1000 m^2 postanowiono wyłożyć płytkami tworzącymi parkietaz półforemny. Oszacuj łączną powierzchnię płytek poszczególnych rodzajów jaką trzeba zamówić. Zrób to dla wszystkich typów parkietazy półforemnym.
17. Trzy gatunki pszczoł budują plastry modelowane na trzech parkietazach foremnym. Plastry mają ten sam rozmiar całkowity, ten sam rozmiar (pole przekroju) komórek, i tą samą grubość ścianek. Które pszczoły zużywają najwięcej, a które najmniej ilości wosku do budowy pojedynczego plastra?