

Parkietaże i grupy symetrii płaskich

Lista 2. Izometrie, symetrie i parkietaże z różnymi własnościami symetrii.

Zadania o izometriach

- Znajdź wszystkie izometrie płaszczyzny przekształcające:
 - prostokąt $ABCD$ na przylegający do niego prostokąt $CDEF$ o tych samych wymiarach (są 4 takie izometrie - dlaczego nie ma ich więcej?);
 - kwadrat $ABCD$ na przylegający do niego kwadrat $CDEF$ (8 izometrii, w tym dwie symetrie z poślizgiem);
 - trójkąt równoboczny ABC na przylegający do niego przystający trójkąt BCD (6 izometrii, w tym dwie symetrie z poślizgiem);
 - romb $ABCD$ na przylegający do niego romb $CDEF$ będący przesuniętą kopią rombu $ABCD$ (4 izometrie);
 - pięciokąt foremny $ABCDE$ na przylegający do niego identyczny $DEFGH$ tego samego kształtu (10 izometrii, w tym 5 obrotów i 4 symetrie z poślizgiem);

Zadania o typach symetrii figur ograniczonych

- Jaki typ symetrii mogą mieć figury zbudowane (a) z dwóch, (b) z trzech jednakowych kwadratów? Znajdź wszystkie możliwe typy symetrii, dopuszczając też sytuacje, w których kwadraty na siebie zachodzą.
- Wewnątrz kwadratu dorysowano prosty ornament, w wyniku czego otrzymana figura ma mniej symetrii niż kwadrat. Podaj przykłady tego rodzaju ornamentów i znajdź wszystkie możliwe typy symetrii tak uzyskanych figur, uwzględniając różnice związane np. z położeniem osi symetrii względem kwadratu. Zrób to samo dla trójkąta równobocznego i sześciokąta foremnego.
- Jednym prostym cięciem nożyczek od kwadratu został odcięty jego fragment. Jakie typy symetrii może mieć otrzymana w ten sposób figura? Jak zmieni się odpowiedź, gdy od kwadratu zostaną kolejno odcięte dwa fragmenty?
- Pogrupuj wielkie litery alfabetu łacińskiego według ich typów symetrii.

Zadania o parkietażach regularnych

- Dany jest dowolny sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym boki AB i DE są równoległe i mają jednakową długość. Wymyśl i opisz sposób wyparkietowania całej płaszczyzny, w sposób regularny czyli klepkowo tranzytywny (każda klepka może być przeprowadzona na każdą inną przez pewną symetrię całego parkietażu), jednakowymi klepkami o kształcie danego sześciokąta.
- Z równoległoboku utworzono pięciokąt przez obcięcie jednego z narożników. Wymyśl i opisz sposób wyparkietowania płaszczyzny, w sposób regularny, klepkami o kształcie tego pięciokąta. UWAGA: parkietaż nie musi być wielokątowy.
- Znajdź przynajmniej 10 różnych sposobów wyparkietowania płaszczyzny w sposób regularny (czyli klepkowo tranzytywny) prostokątnymi klepkami o wymiarach 2×1 . Oczywiście parkietaże te nie muszą być wielokątowe. Parkietaże uważamy za różne, jeśli różnią się sposobem przylegania do siebie klepek, lub rodzajem występujących w nich symetrii.

Zadania o typach symetrii szlaków (i figur ograniczonych też)

- Parkietaż pasowy* to parkietaż płaszczyzny, dla którego inspiracją jest podział płaszczyzny na pasy jednakowej szerokości. Dokładniej, jest to parkietaż płaszczyzny nieograniczonymi figurami, z których każda znajduje się pomiędzy dwiema nieograniczonymi liniami (oczywiście niekoniecznie prostymi), a każda z tych dwóch linii granicznych jest w całości częścią wspólną z sąsiednią nieograniczoną klepką parkietażu. Dla każdego typu symetrii szlaków zaprojektuj

parkietaż pasowy, z płytkami jednego kształtu (ewentualnie dwóch kształtów, jeśli nie widzisz innej możliwości) tak, by typ symetrii tego parkietażu był taki sam jak typ symetrii szlaku.

10. Jakie typy symetrii szlaków da się zrealizować jako typy symetrii parkietaży płaszczyzny nieograniczonymi płytkami o kształcie opisanym w następujący sposób w układzie współrzędnych:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \geq 0\}.$$

A jakie typy symetrii figur ograniczonych da się zrealizować takimi parkietażami?

11. *Konstelacja prostych* to nieograniczona figura będąca sumą pewnej (skończonej lub nieskończonej) rodziny prostych na płaszczyźnie. Znajdź konstelacje prostych realizujące wszystkie typy symetrii szlaków i figur ograniczonych.
12. Czy jednakowymi nieograniczonymi płytkami o jednym z kształtów przedstawionych poniżej da się wyparkietować całą płaszczyznę? Jakie typy symetrii szlaków można zrealizować za pomocą takich parkietaży, dla poszczególnych kształtów płytek?



Zadania o klasach tranzytywności w parkietażach

13. Sprawdź, czy dla wszystkich parkietaży Archimedesowych zbiór klepek ustalonego kształtu zawsze tworzy jedną klasę tranzytywności. Jeśli nie, ustal ile jest takich klas. (Parkietaże dla których zachodzi powyższa własność nazywają się *ekwitranzytywnymi*.)
Zrób to samo dla parkietaży 2-Archimedesowych przedstawionych na załączonym rysunku, na osobnej kartce.
14. Ustal liczbę klas tranzytywności w zbiorze wszystkich krawędzi poszczególnych parkietaży Archimedesowych.
15. Dla dowolnych liczb całkowitych $t, h \geq 1$ podaj przykład wielokątowego parkietażu płaszczyzny z trójkątów równobocznych i sześciokątów foremnych, w którym jest dokładnie t klas tranzytywności trójkątów, oraz dokładnie h klas tranzytywności sześciokątów.
16. Dla każdego całkowitego $m \geq 1$ podaj przykład niewielokątowego parkietażu z jednakowych kwadratów, w którym jest dokładnie m klas tranzytywności klepek.
17. Klepki kwadratowego parkietażu platońskiego pomalowano każdą na jeden z dwóch kolorów w taki sposób, że symetrie parkietażu zachowujące kolory są tranzytywne na zbiorze klepek każdego z kolorów. Znajdź jak najwięcej, a najlepiej 9, istotnie różnych sposobów takiego pokolorowania.

Kolorowe parkietaże Archimedesowe

Kolorowy parkietaż Archimedesowy to wielokątowy parkietaż utworzony z wielokątów foremnych, z których każdy pomalowany jest na pewien kolor, zaś wokół wszystkich wierzchołków pojawia się taka sama konfiguracja klepek, uwzględniając zarówno kształty jak i kolory.

18. Znajdź wszystkie kolorowe parkietaże Archimedesowe utworzone z samych kwadratów o dwóch kolorach (jest ich nieskończenie wiele, ale wszystkie dadzą się sensownie opisać!). Znajdź wśród nich te wszystkie parkietaże, które są wierzchołkowo regularne (co znaczy, że symetrie parkietażu przekształcają dowolny wierzchołek na dowolny inny).
19. Znajdź wszystkie wierzchołkowo regularne kolorowe parkietaże Archimedesowe utworzone z samych kwadratów, pomalowanych na przynajmniej 3 kolory.