Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe
Lista 1. Aksjomaty pola dla wielokątów.

1. Posługując się aksjomatami pola oraz wywiedzionymi z aksjomatów (na wykładzie) własnościami, a także znanymi z geometrii własnościami figur, wyprowadź wzory na pole: (a) równoległoboku, (b) trójkąta, (c) trapezu. W przypadku trudności z przypadkiem ogólnym zacznij od przypadków łatwiejwszych: równoległoboku o bocznych krawędziach nie za bardzo pochylonych, trójkąta prostokątnego, trójkąta i trapezu równoramiennego. W poszczególnych podpunktach tego zadania możesz też korzystać z podpunktów poprzednich.
2. Zbadaj, które aksjomaty pola są spełnione, a które nie są, przez poszczególne funkcje P_i opisane poniżej:
   (a) $P_1(W) := 1$ dla każdej figury W;
   (b) $P_2(W) := 1/4 \cdot O(W)$, gdzie $O(W)$ jest obwodem figury W;
   (c) niech C będzie ustalonym okręgiem na płaszczyźnie i niech $P_3(W)$ będzie długością tej części okręgu C, która jest zawarta w W;
   (d) rozważmy na płaszczyźnie *punkty kratowe*, tzn. punkty mające w pewnym ustalonym układzie współrzędnych obie współrzędne całkowite, i niech $P_4(W) := w + 1/2 \cdot b - 1$, gdzie w jest ilością punktów kratowych leżących wewnątrz W, zaś b ilością punktów kratowych na brzegu W;
   (e*) oznaczmy przez $wyp(W)$ tzw. *otoczkę wypukłą* figury W, czyli najmniejszą figurę wypukłą zawierającą figurę W, i niech $P_5(W) := 1/4 \cdot O(wyp(W))$, gdzie O oznacza obwód.
3. Uzasadnij, że zastępując jeden z aksjomatów pola innym aksjomatem jak poniżej otrzymamy równoważny układ aksjomatów:
   (a) aksjomat jednostki aksjomatem: "pole ustalonego kwadratu o boku 2 wynosi 4";
   (b) aksjomat monotoniczności aksjomatem: "$P(W) \geq 0$ dla każdego wielokąta W";
   (c) aksjomat przystawania słabszym aksjomatem przystawania trójkątów: "przystające trójkąty mają równe pola";
   (d*) aksjomat jednostki aksjomatem: "pole ustalonego trójkąta równobocznego o boku 1 wynosi $\sqrt{3}/4$".
4. Uzasadnij, że następujących stwierdzeń nie da się udowodnić bez odwołania się do aksjomatu przystawania (a więc wyłącznie na podstawie trzech pozostałych aksjomatów pola):
   (a) każdy kwadrat jednostkowy ma pole 1;
   (b) pole trójkąta powstałego z podziału dowolnego prostokąta przekątną jest równe połowie pola tego prostokąta;
   (c) istnieją wielokąty o dowolnie dużych polach;
   (d) równoległoboki o równych podstawach i równych wysokościach mają równe pola;
5. Uzasadnij, że stwierdzeń (b), (c) i (d) z zadania 4 nie da się udowodnić bez korzystania z aksjomatu sumy. A czy bez aksjomatu sumy można udowodnić, że każdy prostokąt o obu bokach długości ≥ 1 ma pole ≥ 1?
6. Niech P_0 będzie zwykłym polem figur wielokątnych. Zbadaj, które aksjomaty pola są spełnione, a które nie są, przez poszczególne funkcje P_i opisane poniżej:
   (a) $P_6(W) := 1/2 \cdot P_0(W) + 1/2$;

(b) $P_7(W) := \min(P_0(W), 1000)$;

(c) ustalmy pewną półpłaszczyznę E zawierającą kwadrat jednostkowy K będący wzorcem pola (kwadrat z aksjomatu jednostki) i niech $P_8(W) := P_0(W \cap E)$.

7. Czy zastępując aksjomat sumy aksjomatem "$P(W_1 \cup W_2) \leq P(W_1) + P(W_2)$ dla dowolnych figur wielokątnych W_1 i W_2" otrzymamy równoważny układ aksjomatów?
8. Czy stwierdzenie "wśród prostokątów o ustalonym jednym boku ten, którego drugi bok jest dłuższy nie moż e mieć mniejszego pola" jest niezależne od układu aksjomatów
   (a) AS, AM, AJ; (b) AP, AM, AJ?
9. Czy stwierdzenie "pole wielokąta jest równe połowie kwadratu średnicy tego wielokąta" (gdzie średnica to maksymalna odległość między punktami wielokąta) można obalić za pomocą
   (a) aksjomatów pola;
   (b) samych tylko aksjomatów AP, AM, AJ?
10. Czy układ składający się z aksjomatów AP, AM, AJ oraz z zaprzeczenia aksjomatu AS jest niesprzeczny?
11. Czy układ składający się z aksjomatów AS, AP, AJ oraz z aksjomatu "pola wielokątów podobnych są sobie równe" jest niesprzeczny?
12. Czy te spośród układów aksjomatów z zadań 10 i 11, które są niesprzeczne, są również zupełne?