DO CZEGO PRZYDAJĄ SIĘ MODELE TEORII?

PODSTAWOWA OBSERWACJA.

Jeśli pewien zestaw aksjomatów zachodzi w pewnym modelu, to wszystkie stwierdzenia dające się wyprowadzić z tych aksjomatów metodą dedukcji też muszą zachodzić w tym modelu.

WNIOSEK 1. Jeśli zestaw aksjomatów $A_1, \ldots, A_n$ zachodzi w pewnym modelu, zaś stwierdzenie S w tym modelu nie zachodzi, to S nie da się wyprowadzić z aksjomatów $A_1, \ldots, A_n$ metodą dedukcji.

PRZYKŁADY.

① W modelu $P_{\mathcal{L}}(W) := d(\mathrm{int}(W) \cap \mathcal{L}) + \frac{1}{2} d(\partial W \cap \mathcal{L})$

spełnione są aksjomaty AJ, AM, AS

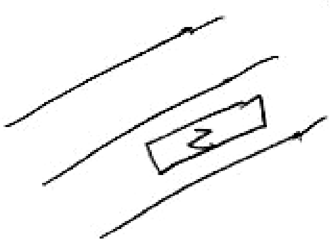
natomiast AP nie zachodzi.

ZATEM: stwierdzenie AP nie da się wyprowadzić z aksjomatów AJ, AM, AS.

② INNE ZDANIE:

Każdy wielokąt o niepustym wnętrzu ma dodatnie pole.

Nietrudno sprawdzić, że zdanie to nie jest spełnione w modelu $P_{\mathcal{L}}$, bo np dla wielokąta Z jak na rysunku zachodzi



$$P_{\mathcal{L}}(Z) = 0.$$

ZATEM: z aksjomatów AJ, AM, AS nie da się wyprowadzić własności dodatniości pola dla wielokątów o niepustym wnętrzu.

WNIOSEK 2. Jeśli mamy dwa modele:

(1) M_1 – w którym zachodzą aksjomaty $A_1, \dots, A_n$ i nie zachodzi stwierdzenie S,

(2) M_2 – w którym zachodzą aksjomaty $A_1, \dots, A_n$, zaś stwierdzenie S także zachodzi,

to ani S ani $\neg S$ nie da się wyprowadzić z tych aksjomatów, a to znaczy że S jest stwierdzeniem niezależnym od aksjomatów $A_1, \dots, A_n$.

PRZYKŁADY.

(1) Niezależność hipotezy continuum HC od aksjomatów ZFC teorii mnogości została udowodniona przez Paula Cohena metodą wskazania dwóch modeli teorii ZFC: jednego, w którym HC była spełniona, i drugiego, w którym nie była.

(2) W dalszej części wykładu opiszemy model $\overline{P}$ teorii pola wielokątów, w którym spełnione będą wszystkie 4 aksjomaty teorii pola.

Z istnienia modeli P_R oraz $\overline{P}$ otrzymujemy wniosek, że aksjomat AP jest niezależny od pozostałych trzech aksjomatów (AJ, AM, AS) – nie da się go na ich podstawie ani uzasadnić, ani obalić.

(3) $P_{\neg AJ} := 2 \cdot \overline{P} \Rightarrow$ AJ niezależny od pozostałych.

WNIOSEK 3

Każdy zestaw stwierdzeń, które naraz zachodzą w pewnym modelu, jest niesprzeczny (a więc może stanowić podstawę sensownej teorii).

Dowód: nie da się z tych stwierdzeń wyprowadzić zarówno pewnego S jak i jego zaprzeczenie $\neg S$, bo tylko jedno spośród S oraz $\neg S$ zachodzi w tym modelu. Wtedy to drugie, które nie zachodzi, nie da się wyprowadzić. □

SPOSÓB UDOWODNIENIA, ŻE ZESTAW AKSJOMATÓW JEST NIESPRZECZNY:

wskazać/skonstruować model, w którym zachodzą wszystkie te aksjomaty.

PRZYKŁADY. (1) Model P_R pokazuje, że zestaw AJ, AM, AS jest niesprzeczny.

(2) Gdy już opiszemy model $\overline{P}$, w którym zachodzą wszystkie 4 aksjomaty pola, to otrzymamy przy okazji dowód niesprzeczności teorii pola.

SCHEMAT ROZSTRZYGANIA czy stwierdzenie S jest niezależne od aksjomatów $A_1, \dots, A_n$

jeśli sądzimy że jest zależne

JAK NIE WIEMY CO SĄDZIĆ, TO TRZEBA PRÓBOWAĆ I TEGO I TEGO

jeśli sądzimy że jest niezależne

trzeba przeprowadzić dedukcyjne uzasadnienie że S zachodzi, lub że S nie zachodzi

trzeba wskazać 2 modele:
1. w którym $A_1, \dots, A_n$ oraz S zachodzą
2. w którym $A_1, \dots, A_n$ zachodzą, zaś S nie zachodzi.

Konstrukcja funkcji $\overline{P}$

przyporządkowującej wielokątom W liczby nieujemne

spełniającej wszystkie cztery aksjomaty . AJ, AA, AP, AM

bez odwoływania się do pojęcia pola.

<u>Definicja</u>: wielokątem nazywamy każdą figurę, którą można przedstawić jako sumę skończonej ilości nie zachodzących na siebie trójkątów.

Określenie funkcji $\overline{P}$:

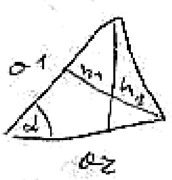
1. Jeśli W jest trójkątem, to $\overline{P}(W) = ah/2$
2. Jeśli W jest innym wielokątem, to przedstawiamy go jako sumę niezachodzących trójkątów: $W = T_1 \cup \dots \cup T_k$, i określamy funkcję $\overline{P}(W) = \overline{P}(T_1) + \dots + \overline{P}(T_k) = \sum_{i=1}^{k} \overline{P}(T_i)$.

$\left\{\begin{array}{l}\text{PROBLEMY:}\\ \bullet\ \text{Ad 1. Czy } \overline{P}(W) \text{ zależy od wyboru podstawy } a\text{?}\\ \bullet\ \text{Ad 2. Czy } \overline{P}(W) \text{ zależy od sposobu rozkładu } W \text{ na trójkąty?}\end{array}\right.$

FAKT 1. Jeśli W jest trójkątem, to $\overline{P}(W)$ nie zależy od wyboru podstawy.

FAKT 2. $\overline{P}(W)$ nie zależy od sposobu rozkładu W na trójkąty.

Dowód faktu 1:

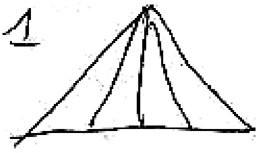


$$a_1 h_1/2 = a_1 a_2 \sin\alpha/2 = a_2 h_2/2 \quad . \square$$

bo $h_1 = a_2 \sin\alpha$, $h_2 = a_1 \sin\alpha$.

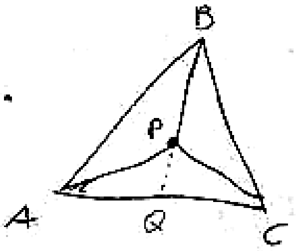
Dowód faktu 2 to ciąg lematów:

Lemat 1



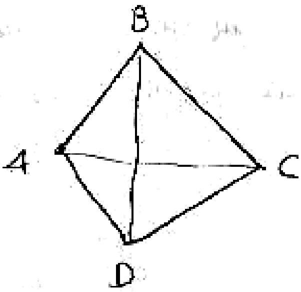
$\overline{P}(T) = \sum_i \overline{P}(T_i)$.

Lemat 2.



$\overline{P}(ABC) = \overline{P}(ABP) + \overline{P}(BCP) + \overline{P}(CAP)$.

Lemat 3.



$\overline{P}(ABD) + \overline{P}(BCD) = \overline{P}(ABC) + \overline{P}(ACD)$.

obieg
znak obiegu trójkąta

Dla ogólnego przypadku posłużymy się pojęciem zorientowanego pola trójkąta

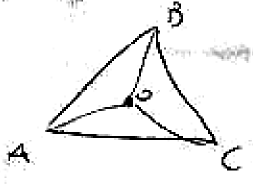
DEFINICJA.

$$(ABC) := \begin{cases} \overline{P}(ABC) & \text{gdy obieg } ABC \text{ dodatni} \\ -\overline{P}(ABC) & \text{— " — ujemny} \\ 0 & \text{gdy punkty } A, B, C \text{ leżą na jednej prostej} \end{cases}$$

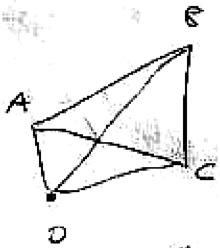
KLUCZOWY WZÓR: ABC – trójkąt, O – dowolny punkt.

$$(ABC) = (OAB) + (OBC) + (OCA).$$

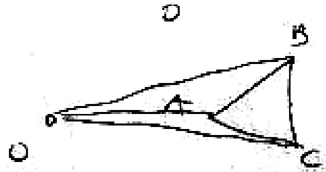
Przypadki:



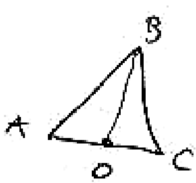
wynika z lematu 2



wynika z lematu 3



wynika z lematu 2.



wynika z lematu 1 ITD.

Strategia dowodu faktu 2:

$$W = \bigcup_{i=1}^{k} T_i = \bigcup_{j=1}^{m} T'_j$$

Znajdujemy rozkład W na mniejsze trójkąty Δ_u takie, że

każdy trójkąt T_i jest sumą pewnych trójkątów Δ_u

— " — T'_j — " , —————— .

} wspólne podrozbicie

Aby uzasadnić, że $\sum \bar{P}(T_i) = \sum \bar{P}(T'_j)$, pokażemy że

(*) $\sum \bar{P}(T_i) = \sum \bar{P}(\Delta_u)$ oraz (*') $\sum \bar{P}(T'_j) = \sum \bar{P}(\Delta_u)$.

Dla pokazania (*) i (*') wystarczy udowodnić następujący

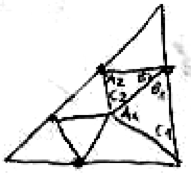
Lemat 4. Jeśli trójkąt T jest sumą niezachodzących na siebie trójkątów Δ_u, to $\bar{P}(T) = \sum \bar{P}(\Delta_u)$.

Wtedy $$\bar{P}(T_i) = \sum_{\Delta_u \subset T_i} \bar{P}(\Delta_u),$$ więc

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{P}(T_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\Delta_u \subset T_i} \bar{P}(\Delta_u) = \sum_u \bar{P}(\Delta_u).$$

Pozostaje udowodnić lemat 4.

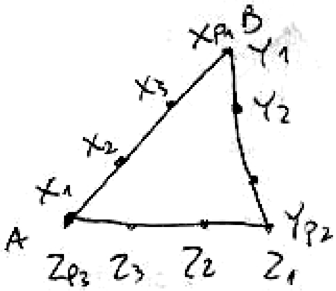
$\Delta_u = A_u B_u C_u$ - obieg dodatni



$$\sum_u \bar{P}(\Delta_u) = \sum_u (A_u B_u C_u) = \sum_u (O A_u B_u) + \sum_u (O B_u C_u) + \sum_u (O C_u A_u)$$

Dla każdej XY przechodzącej przez wnętrze T w sumie powyżej pojawiają się oba wyrażenia (OXY) i (OYX), które się redukują (bo $(OXY) + (OYX) = 0$).

Dla krawędzi XY zawartej w brzegu T zorientowanej zgodnie z dodatnim obiegiem wyrażenie (OXY) pojawia się raz, zaś wyrażenie (OYX) nie pojawia się.



$$\sum \overline{P}(\Delta_n) = \sum (O X_i X_{i+1}) + \sum (O Y_i Y_{i+1}) + \sum (O Z_i Z_{i+1})$$

ale $\sum (O X_i X_{i+1}) = (OAB)$ (z lematu 1)

$\sum (O Y_i Y_{i+1}) = (OBC)$

$\sum (O Z_i Z_{i+1}) = (OCA)$

$$\sum \overline{P}(\Delta_n) = (OAB) + (OBC) + (OCA) = (ABC) = \overline{P}(ABC).$$

- $\overline{P}$ spełnia aksjomaty
- niesprzeczność aksjomatów pola

(• funkcje P_i z ćwiczeń określiliśmy za pomocą funkcji $\overline{P}$)

(różnych pól)

HIPOTEZA: Istnieją wielokąty mające różne pola.

Czy hipotezę tę można uzasadnić bądź obalić przy pomocy aksjomatów AJ, AM, AP (bez aksjomatu addytywności)?

obalić się nie da, bo dla funkcji $\overline{P}$ spełnione są AJ, AM, AP i hipoteza zachodzi.

udowodnić? funkcja $P_{const}(W) = 1$ spełnione są AJ, AM, AP i hipoteza nie zachodzi.

Mamy dwie funkcje: $\overline{P}$ i P_{const}, spełniające aksjomaty AJ, AM, AP

dla pierwszej z nich hipoteza zachodzi

dla drugiej nie zachodzi

Zatem „Hipoteza różnych pól" jest niezależna od aksjomatów AJ, AM, AP.