MODEL ARYTMETYCZNY HILBERTA – $\mathbb{R}^2$.

- punkty – pary (x,y) liczb rzeczywistych
- proste – podzbiory par (x,y) spełniających równanie $ax+by+c=0$ dla pewnych $a,b,c\in\mathbb{R}$, $(a,b)\neq(0,0)$

UWAGA. Dwa równania $a_1x+b_1y+c_1=0$ i $a_2x+b_2y+c_2=0$ wyznaczają tę samą prostą jeśli ich współczynniki są PROPORCJONALNE, tzn. $a_2=\lambda\cdot a_1$, $b_2=\lambda\cdot b_1$, $c_2=\lambda c_1$ dla pewnego $\lambda\neq0$.

NP: $2x-y+3=0$, $-4x+2y-6=0$.

- relacja należenia – gdy para reprezentująca punkt spełnia równanie reprezentujące prostą
- porządek na prostych : $(x_1,y_1)<_p(x_2,y_2)$

  gdy $x_1<x_2$ lub ($x_1=x_2$ i $y_1<y_2$).

- miara odcinka : $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$,

  $m(AB)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$.

- miara kąta : $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$, $C=(c_1,c_2)$

  $\sphericalangle BAC$ – para półprostych $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ (o początku A, zawartych w prostych AB, AC wyznaczonych przez punkty B i C odpowiednio)

  $$M(\sphericalangle BAC)=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{m(AB)\cdot m(AC)}\right)$$

UWAGA: nie zależy od wyboru punktów B,C na półprostych będących ramionami kąta.

- dobrze określone dzięki nierówności Schwarza (wraz z warunkiem na równość)

PRAWDZIWOŚĆ AKSJOMATÓW

I1. $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$

istnienie: $(x-a_1)(a_2-b_2)=(y-a_2)(a_1-b_1)$

jedyność: jeśli układ równań $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{cases}$

ma 2 różne rozwiązania (a_1,a_2) (b_1,b_2), to współczynniki tych równań są proporcjonalne, więc równania reprezentują tą samą prostą.

$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}=0$ $\quad A,B$ proporcjonalne do A',B'

$A'=\lambda A$, $B'=\lambda B$

wtedy, wstawiając (a_1,a_2),

$$C=-Aa_1-Ba_2, \quad C'=-\lambda A a_1-\lambda B a_2=\lambda\cdot C.$$

I2. Obierając dowolne x i wstawiając do $ax+by+c=0$ } gdy $b\neq 0$

jednoznacznie wyznaczamy y „do pary",

Stąd ∞ wiele par rozwiązań, czyli ∞ wiele punktów na prostej.

I3. Dwie pary spełniające $ax+by+c=0$ i jedna niespełniająca.

P1. Oczywiste (porządek leksykograficzny

P2. pominięty

M1. Oczywiste

M2. $ax+by+c=0$ reprezentuje prostą p — czyli rozwiązania równania $ax+by+C=0$

(x_0,y_0) reprezentuje punkt $A\in p$

FAKT. Punkty należące do p mają postać $(x_0+tb,\ y_0-ta)=B_t$ dla dowolnego parametru $t\in\mathbb{R}$

$$m(AB_t)=\sqrt{(tb)^2+(ta)^2}=|t|\sqrt{a^2+b^2} \qquad t=\pm\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

trzeba wybrać t takiego znaku, by dostać punkt na odp. półprostej o początku A zawartej w p. □

M3. z FAKTU możemy przyjąć, że

$$A=(x_0,y_0),\quad B=(x_0+tb,\ y_0-ta),\quad C=(x_0+sb,\ y_0-sa)$$

gdzie $0<t<s$

Wtedy $m(AB)=|t|\sqrt{a^2+b^2}$, $m(BC)=(s-t)\sqrt{a^2+b^2}$

$m(AC)=s\cdot\sqrt{a^2+b^2}$. □

K1, K2, K3 pomijamy || robimy to metodami geometrii analitycznej, zapominając że jest to geometria analityczna, a traktując to jak teorię algebraiczną par liczb rzeczywistych, równań liniowych, itp.

R. $P_0=(x_0,y_0)$,

$P_0\notin p$, czyli x_0,y_0 nie spełnia równania $ax+by+c=0$, czyli $ax_0+by_0+c\neq 0$.

p zadane przez $ax+by+c=0$

Szukana prosta m to $Ax+By+C=0$

x_0,y_0,a,b,c – dane

A,B,C – szukane

1°. $P_0\in m$ czyli $Ax_0+By_0+C=0$

2°. p nie przecina m, czyli układ

$$(*)\quad \begin{cases} ax+by+c=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$ nie ma rozwiązań (jest sprzeczny)

Z 2° wynika, że $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix}=0$, czyli $A=t\cdot a$, $B=t\cdot b$

dla pewnego $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Z 1° mamy $C=-Ax_0-By_0=-tax_0-tby_0=t$

$=t(-ax_0-by_0)$

Tak więc współczynniki wszystkich równań $Ax+By+C=0$ spełniających 1° i 2° są proporcjonalne, stąd istnienie i jedyność prostej m. □

Należy jeszcze sprawdzić, że p i m nie mają punktów wspólnych (że układ $(*)$ jest sprzeczny, a nie zależny [ma wiele rozwiązań])

W tym celu także sprawdzić, że przynajmniej jeden z wyznaczników $\begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} b & c \\ B & C \end{vmatrix}$ jest niezerowy.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix} = aC - Ac = at(-ax_0 - by_0) - tac =$$

$$= -at\,(ax_0 + by_0 + c)$$

$$\begin{vmatrix} b & c \\ B & C \end{vmatrix} = bC - Bc = bt(-ax_0 - by_0) - tbc =$$

$$= -bt\,(ax_0 + by_0 + c)$$

Ponieważ z założenia $A \notin p$, więc

$$ax_0 + by_0 + c \neq 0$$

Również $t \neq 0$.

Ponadto, przynajmniej jeden spośród współczynników a, b w równaniu $ax + by + c = 0$ jest niezerowy. $\square$