HISTORIA BADAŃ PODSTAW GEOMETRII

- „Elementy" Euklidesa (365 p.n.e – 270 p.n.e.)

POSTULATY (aksjomaty)

– prowadzenie prostej przez 2 punkty

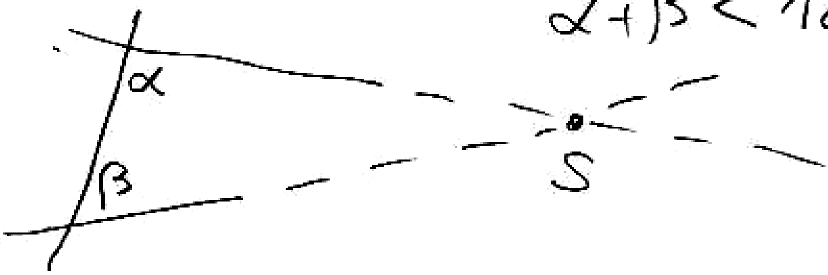
– możliwość nieograniczonego przedłużania prostych

– odkładanie odcinków równych danym

....

– V postulat Euklidesa

$\alpha+\beta<180^\circ$



- JUŻ WSPÓŁCZEŚNI EUKLIDESOWI, ale i potomni, dostrzegali dwa rodzaje mankamentów:

1) pewna niekompletność pojęciowa, intuicyjne przyjmowanie pewnych własności, nieścisłość argumentów
   – uzupełniali i poprawiali
2) V postulat wydawał się „podejrzany"
   – wydawał się zbyt złożony jak na pierwotną własność
   – dociekano czy nie jest zbędny (gdyż da się go wyprowadzić z pozostałych postulatów) –
   – wcześniej wykazano zbędność kilku innych postulatów Euklidesa

Ad 1)

- brak ścisłego opisania i aksjomatów dotyczących pojęć:
  - leżenie między
  - leżenie po tej samej stronie
  - wnętrze i zewnętrze

  STĄD ZRODZIŁA SIĘ GRUPA
  AKSJOMATÓW PORZĄDKU

  Moritz Pasch ok. 1882

  - u niego były to aksjomaty dotyczące relacji „leżenia między"

- korzystanie przez Euklidesa, bez powoływania się na postulaty, z pewnych intuicyjnie nieodpartych własności „ruchów sztywnych" na płaszczyźnie

  STĄD ZRODZIŁA SIĘ GRUPA AKSJOMATÓW PRZYSTAWANIA → dotycząca własności ruchów sztywnych

  David Hilbert 1899

  [w naszym ujęciu tę funkcję pełnią aksjomaty miary, zwłaszcza miary kątów, a najbardziej aksjomat K3 dotyczący cechy przystawania trójkątów]

Ad (2)

(A) Próby dowodu $\underline{V}$ postulatu

w starożytności, Grecy : sam Euklides [(-330) - (-275)]
Proklos [410 - 485]
Klaudiusz Ptolemeusz [100 - 168]
Heron z Aleksandrii [10 - 70 n.e.] ok. ?

w średniowiecznym Arabowie muzułmanie : Nasir ad Din at Tusi XII w. - Persja
Al Dżauhari IX w. Bagdad
Omar Chajjam (1038 - 1123) - Turcja

we współczesnych państwach Iran, Azerbejdżan

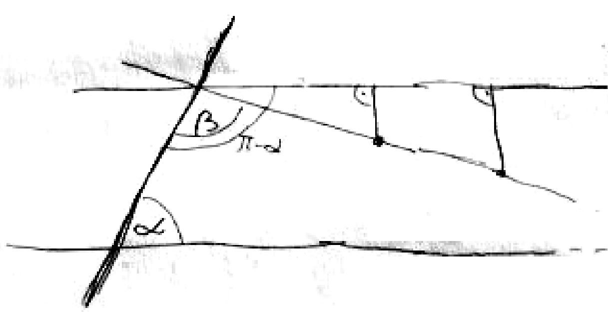
później, Europejczycy : Saccheri, [~~1667~~ 1733]
Lambert [1728 - 1777]
Legendre [1752 - 1833]
Łobaczewski [1792 - 1856]

John Playfair [Szkot] 1748 - 1819
Farkas Bolyai 1775 - 1856

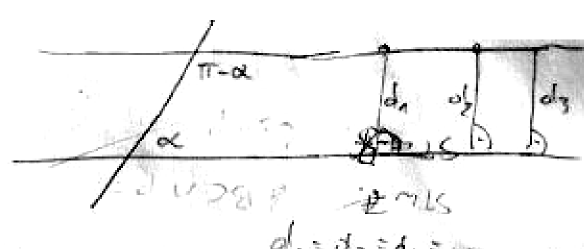
(A1) Błędne dowody, wykorzystujące pewne własności które same nie chcą wynikać z pozostałych aksjomatów

Proklos

$\alpha + \beta < \pi$



Skorzystał z tego że proste $\longrightarrow$ pozostają w stałej od siebie odległości



$d_1 = d_2 = d_3 = \ldots$

(A2) Znajdowanie stwierdzeń, z których wynika $\underline{V}$ postulat i próby ich udowodnienia.

Legendre [1752 - 1833]

- bez $\underline{V}$ postulatu udowodnił, że suma kątów w trójkącie $\leq \pi$
- udowodnił, że jeśli założyć że suma kątów w trójkącie $= \pi$ to z tego i z pozostałych aksjomatów wynika $\underline{V}$ postulat.
- wystarczy udowodnić że $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

• dowód nie wprost, że $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

Zał. że nie. Wtedy $\alpha+\beta+\gamma<\pi$ dla pewnego trójkąta

Oznaczmy przez $\mathrm{def}(T) := \pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ tzw. defekt trójkąta T.

$\mathrm{def}(T)\geq 0 \ \forall T$ z tego że $\alpha+\beta+\gamma\leq\pi$.

Legendre dowodzi że

jeśli $\mathrm{def}(T)>0$ to istnieje T' taki że

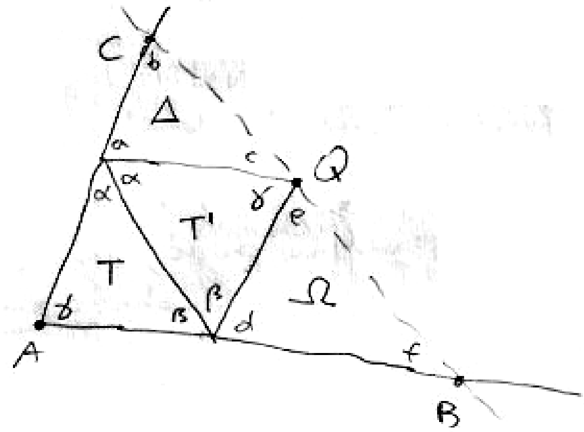
$$\mathrm{def}(T')\geq 2\cdot \mathrm{def}(T).$$

Powtarzając to rozumowanie Legendre dowodzi istnienia trójkąta o defekcie $>\pi$, co jest niemożliwe, bo musiałoby być $\alpha+\beta+\gamma<0$.

To sprowadzi dowodu, że $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ dla każdego trójkąta

Główny krok:

T ma dwa kąty ostre, np α,β



$$\mathrm{def}(ABC) = \mathrm{def}(T)+\mathrm{def}(T')+\mathrm{def}(\Delta)+\mathrm{def}(\Omega) =$$
$$= 2\,\mathrm{def}(T)+\mathrm{def}(\Delta)+\mathrm{def}(\Omega)\geq 2\,\mathrm{def}(T).$$

$$\mathrm{def}(T)+\mathrm{def}(T')+\mathrm{def}(\Delta)+\mathrm{def}(\Omega) = 4\pi -$$
$$-\left[(\gamma+b+f)+\underbrace{(a+2\alpha)}_{=\pi}+\underbrace{(c+\gamma+e)}_{=\pi}+\underbrace{(d+2\beta)}_{=\pi}\right] =$$
$$= \pi-(\gamma+b+f) = \mathrm{def}(ABC).$$

Skorzystał z tego, że przez punkt Q można (zawsze) poprowadzić prostą która przetnie ramiona AB i AC.

Te i inne stwierdzenia, z których (wobec obecności pozostałych aksjomatów) wynika V postulat, i które były świadomie lub nieświadomie wykorzystywane w próbach jego dowodu 6

- i w czworokącie o dwóch sąsiednich kątach prostych naprzeciw kąta ostrego leży krótszy bok (Nasir ad-Din)

- istnieje prostokąt Ibn Korra (IX w. Bagdad)
- istnieją trójkąty podobne ale nie przystające
- wszystkie proste prostopadłe do jednego ramienia kąta ostrego przecinają też drugie ramię
- na trójkącie można opisać okrąg [Farkas Bolyai] 1775-1856
- [Playfair] 1748-1819 – aktualna wersja aksjomatu równoległości
- przez każdy punkt wnętrza obszaru kąta ($< \pi$) można poprowadzić prostą przecinającą oba ramiona [Al Dżauhari IX w. Bagdad z tego V postulat] Legendre 1752-1833
- odległość pomiędzy nieprzecinającymi się prostymi jest stała [Proklos 410-485]

dotąd 2014

(A3) Próby budowania geometrii bez V postulatu

tzw. geometria absolutna

Sam Euklides – ponad połowę [illegible] elementów

Cechy przystawania Δ, okrąg wpisany w trójkąt i przecinanie się dwusiecznych, rzuty prostokątne punktów na prostą, istnienie symetrii osiowych, obrotów o dowolny kąt itp

Legendre – np. suma kątów w trójkącie $\leq \pi$

Nie dało się wyprowadzić np. że:

[– na trójkącie można opisać okrąg]

– tw. o kątach wpisanych i środkowych

– każde dwie nieprzecinające się proste mają wspólną prostopadłą

– tw. Pitagorasa

– tw. Talesa

– a także wszystkich wymienionych wcześniej stwierdzeń, z których wynika V postulat

(A4) Próby dowodzenia V postulatu NIE WPROST, przez zaprzeczenie któregoś ze stwierdzeń z których on wynika

Saccheri, Lambert 1728-1777 – istnienie prostokąta zaprzeczali
1667-1733
Szukali sprzeczności logicznej – nie sprzeczności z intuicją (np. istnienie prostych asymptotycznych)
- pierwszy uzyskał błędną sprzeczność logiczną
- drugi nie uzyskał sprzeczności

Łobaczewski – zaprzeczył aksjomat równoległości Playfaira

(A5) 1826
Nikołaj Łobaczewski – rozwinął koncepcję
Carl Gauss
Janos Bolyai 1829

Zaprzeczenie aksjomatu równoległości (wraz z aksjomatami geometrii absolutnej) i doszedł do wniosku, że jest to równoprawna geometria

• Własności geometrii te przekroczyły rozumienie geometrii euklidesowej i były bogatsze w liczbę twierdzeń oraz ciekawych zjawisk

• nie umiał pokazać niesprzeczności, ale w tym czasie geometria euklidesowa też jej nie miała.

(A6) Niesprzeczność (Beltrami, Riemann, Klein, ok. 1860)

jeśli niesprzeczna jest geometria euklidesowa to niesprzeczna jest też geometria nieeuklidesowa

MODEL geometrii nieeuklidesowej wykonany z elementów euklidesowych!

(A7) 1899 David Hilbert
„O podstawach Geometrii"

[Kompletny układ aksjomatów]

• gruntowne zbadanie aksjomatów i teorii geom. euklid.

– niesprzeczność – przy zał. niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych (model arytmetyczny).

– zupełność

– niezależność niektórych aksjomatów od pozostałych

(A8) ok. 1905, Henri Poincare,

• nowe modele geometrii nieeuklidesowej (obecnie najpopularniejsze) półpłaszczyznowy i dyskowy

• Powiązanie geometrii nieeuklidesowej ze współczesną analizą i algebrą. (wydobycie jej z izolacji, w jakiej pozostawała, będąc traktowana z rezerwą przez większość matematyków)