ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWALNE. LISTA 2.

Rozkłady jedności i ich zastosowania

1. Dla ciągłych funkcji rzeczywistych $f, g : M \to R$ na rozmaitości dładkiej M, oraz dla $\varepsilon > 0$ mówimy, że g jest ε-*aproksymacją* f jeśli $||f - g|| < \varepsilon$ (tzn. dla każdego $x \in M$ mamy $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$).
   (a) Uzasadnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$ każda ciągła funkcja $F : M \to R$ posiada gładką ε-aproksymację.
   (b) Rozszerz ten wynik do sytuacji gdy $\varepsilon : M \to R$ jest dowolną ciągłą dodatnią funkcją rzeczywistą, zaś ε-aproksymacja funkcji f to dowolna taka funkcja g, że dla każdego $x \in M$ mamy $|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$.
   (c) Niech $D \subset M$ będzie dowolnym domkniętym podzbiorem. Dla dowolnego ε jak w punkcie (b) uzasadnij, że dowolna funkcja ciągła $f : M \to R$, która jest gładka na pewnym otwartym otoczeniu zbioru D, posiada gładką ε-aproksymację $g : M \to R$ taką, że $g|_D = f|_D$.
2. Dla niezwartej rozmaitości gładkiej M skonstruuj gładką funkcję $f : M \to R$ taką, że dla każdego naturalnego n przeciwobraz $f^{-1}([-n, n])$ jest zwartym podzbiorem w M. Funkcje o tej własności nazywają się funkcjami *właściwymi*. Wskazówka: wykorzystaj zadanie 6 z listy 1; uzasadnij też najpierw następujący fakt pomocniczy: istnieje ciąg otwartych zbiorów V_i takich, że $\cup_i V_i = M$, oraz dla każdego i domlnięcie $\mathrm{cl}(V_i)$ w M jest zwarte i zawarte w V_{i+1}.
3. Niech $\mathcal{U}$ będzie dowolnym pokryciem rozmaitości M zbiorami prezwartym, i niech $\{f_j\}_{j\geq 1}$ będzie gładkim rozkładem jedności wpisanym w $\mathcal{U}$. Uzasadnij, że funkcja $h = \sum_{j\geq 1} j \cdot f_j$ jest gładką funkcją właściwą o dodatnich wartościach. Uzasadnij, że funkcja ta, jak każda rzeczywista funkcja właściwa ograniczona od dołu, posiada globalne minimum (czyli taki punkt $p \in M$, że dla każdego $x \in M$ zachodzi $f(x) \geq f(p)$).
4. Dla rozmaitości M z brzegiem skonstruuj taką gładką funkcję $f : M \to [0, \infty)$, że $\partial M = f^{-1}(0)$ oraz rząd f w dowolnym punkcie brzegowym wynosi 1.

Odwzorowania gładkie

5. Uzasadnij, że naturalne włożenie $i : S^n \to R^{n+1}$ jest gładkie.
6. Niech M, N będą rozmaitościami różniczkowalnymi, i niech $f : M \to N$ będzie przekształceniem gładkim, zaś $g : N \to R$ gładką funkcją rzeczywistą. Uzasadnij z definicji, że złożenie $g \circ f : M \to R$ jest funkcją gładką.
7. Sprawdź, że dla naturalnej struktury rozmaitości gładkiej na produkcie $M \times N$ dwóch rozmaitości gładkich rzutowania $M \times N \to M$ i $M \times N \to N$ są odwzorowaniami gładkimi.
8. Niech $\mathcal{L}$ będzie rozmaitoścą prostych na płaszczyźnie.
   (a) Zdefiniuj rozmaitość kierunków prostych na płaszczyźnie i pokaż, że odwzorowanie przyporządkowujące prostej z $\mathcal{L}$ jej kierunek jest gładkie.
   (b) Pokaż, że odwzorowanie $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ przyporządkowujące każdej prostej prostopadłą do niej przechodzącą przez punkt $(0, 0)$ jest gładkie.
   (c) Dane są gładkie funkcje $p : R \to R^2$ oraz $\theta : R \to R$. Niech $L : R \to \mathcal{L}$ będzie odwzorowaniem, w którym $L(t)$ jest prostą przechodzącą przez punkt $p(t)$ i mającą kierunek $\theta(t)$ (liczony w mierze łukowej, tak że wartości różniące się o π oznaczają ten sam kierunek). Wykaż za pomocą map dla $\mathcal{L}$, że L jest odwzorowaniem gładkim (gładką krzywą w $\mathcal{L}$).
9. Odwzorowanie $F : S^3 \to S^2$ zadane jest wzorem $F(z, w) = (z\bar{w} + w\bar{z}, iw\bar{z} - iz\bar{w}, z\bar{z} - w\bar{w})$, gdzie S^3 traktujemy jak podzbiór w C^2 zadany równaniem $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Uzasadnij za pomocą wyliczenia w mapach, że F jest odwzorowaniem gładkim. Wcześniej uzasadnij, że jest ono dobrze określone.

Dyfeomorfizmy

10. Niech M, N będą gładkimi rozmaitościami n-wymiarowymi, i niech $f : M \to N$ będzie gładkim różnowartościowym odwzorowaniem M na N (surjekcja). Załóżmy, że spełniony jest warunek:
    (*) rząd odwzorowania f w każdym punkcie $p \in M$ wynosi n.
    Udowodnij, że f jest wówczas dyfeomorfizmem. Pokaż też, że tak być nie musi gdy nie jest spełniony warunek (*).

Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia o funkcji odwrotnej z analizy wielu zmiennych.

11. Sprawdź, że odwzorowanie $i : M \times M \to M \times M$ zadane przez $i(x, y) = (y, x)$ jest dyfeomorfizmem. Mając dan permutację σ zbioru $\{1, \ldots, n\}$, zrób to samo dla odwzorowania $g_\sigma : (M)^n \to (M)^n$ zadanego przez $g_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.
12. Znajdź dyfeomeorfizm pomiędzy $R^n \setminus \{O\}$ a rozmaitością produktową $R \times S^{n-1}$.
13. Znajdź przykłady dyfeomorfizmów pomiędzy następującymi rozmaitościami:
    (a) całe R^2 oraz otwarty podzbiór R^2 zadany jako

$$U = \{(x, y) \in R^2 : y > 0, y < x\}$$

    (wnętrze kąta o mierze $\pi/4$);
    (b) cała półpłaszczyzna $H^2 = \{(x, y) : y \geq 0\}$ oraz jej otwarty podzbiór $V = H^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$.
    WSKAZÓWKA: przydatne może być znalezienie najpierw pomocniczych dyfeomorfizmów, np. całego R^2 z otwartym podzbiorem $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, albo V z otwartym podzbiorem $W \subset H^2$ zadanym przez $W = \{(x, y) \in H^2 : x > 0\}$.

Dyfeomorfizmy i dyskretne ilorazy rozmaitości

14. Uzasadnij, że odwzorowanie antypodyczne $a : S^n \to S^n$ określone wzorem $a(x) = -x$ jest gładkie. Uzasadnij, że jest ono dyfeomorfizmem.
15. Rozważmy dwuelementowy zbiór dyfeomorfizmów sfery S^n zoony z identyczności oraz z dyfeomorfizmu antypodycznego z poprzedniego zadania. Uzasadnij, że zbiór ten tworzy grupę dyfeomorfizmów izomorficzną z grupą cykliczną Z_2. Uzasadnij, że tak zadane działanie grupy Z_2 na sferze S^n jest wolne i właściwie nieciągłe.
16. Rozmaitość ilorazową S^n/Z_2, dla działania Z_2 na S^n jak w poprzednim zadaniu, nazywa się n-wymiarową przestrzenią rzutową (gdy $n = 2$ - płaszczyzną rzutową), i oznacza się symbolem RP^n (od agielskiego: real projective). Jej punkty, będące parami (nieuporządkowanymi) punktów antypodycznych (czyli orbitami antypodycznego działania Z_2) oznaczamy przez $[x]$, gdzie $x \in S^n$, za $[x]$ to para $\{x, -x\}$ (orbita punktu x). Podaj opis przestrzeni rzutowej RP^n, jako gładkiej rozmaitości, za pomocą jawnego zbioru map (gładkiego atlasu).
17. Niech $a > 1$ będzie liczbą rzeczywistą. Uzasadnij, że przekształcenia $f_n : R^n \setminus \{O\} \to R^n \setminus \{O\}$ zadane przez $f_n(x) = a^n \cdot x$ są dyfeomorfizmami, i tworzą grupę dyfeomorfizmów izomorficzną z grupą cykliczną Z. Uzasadnij, że grupa ta działa w sposób wolny i właściwie nieciągły na $R^n \setminus \{O\}$.
18. Ustalmy względnie pierwsze liczby naturalne $p > q \geq 1$. Na sferze $S^3 = \{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ mamy przekształcenia $g_n : S^3 \to S^3$, $n = 0, 1, \ldots, p-1$, zadane przez

$$g_n(z_1, z_2) = (e^{2\pi i n/p} \cdot z_1, e^{2\pi i n q/p} \cdot z_2).$$

    Uzasadnij, że przekształcenia g_n są dyfeomorfizmami, i tworzą grupę dyfeomorfizmów izomorficzną z grupą cykliczną Z_p. Uzasadnij też, że grupa ta działa w sposób wolny i właściwie nieciągły na S^3.
19. Niech G będzie grupą działającą na M przez dyfeomorfizmy, w sposób wolny i właściwie nieciągły. Mówimy, że odwzorowanie $f : M \to N$ jest *G-niezmiennicze* jeśli dla każdego $x \in M$ i dla każdego $g \in G$ zachodzi $f(g(x)) = f(x)$. Niech $f : M \to N$ będzie gładkim odwzorowaniem G-niezmienniczym. Uzasadnij, że wówczas odwzorowanie $F : M/G \to N$ zadane przez $F(G(x)) := f(x)$ jest gładkie. Uzasadnij też, że rząd odwzorowanie F w punkcie $G(x)$ jest taki sam jak rząd odwzorowania f w punkcie x.

20 . Posługując się poprzednim zadaniem uzasadnij, że rozmaitość ilorazowa $R^n \setminus \{O\}/Z$ dla działania z zadania 17 jest dyfeomorficza z produktem $S^{n-1} \times S^1$.

21. Uzasadnij, że rozmaitość ilorazowa R^1/Z jest dyfeomorficzna ze sferą S^1.
22. Uzasadnij, że działanie grupy liczb całkowitych Z na R^n określone wzorem

$$k \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + k, (-1)^k \cdot x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

jest wolnym i właściwie nieciągłym działaniem przez dyfeomorfizmy. Zrób to samo dla powyższego działania grupy Z obciętego do podzbioru $\{x \in R^n : -1 \leq x_2 \leq 1\}$. Dla $n = 2$ rozmaitość ilorazową tego ostatniego działania nazywamy *wstęgą Möbiusa*, zaś jej wnętrze *otwartą wstęgą Möbiusa*.

23. Uzasadnij, że rozmaitość $\mathcal{L}$ prostych na płaszczyźnie jest dyfeomorficzna z otwartą wstęgą Möbiusa.
24. Ta sama grupa G działa przez dyfeomorfizmy na rozmaitościach M i N, na obu w sposób wolny i właściwie nieciągły. Odwzorowanie $f : M \to N$ nazywamy wtedy *G-ekwiwariantnym* (albo *G-współzmienniczym*), jeśli dla każdego $x \in M$ i dla każdego $g \in G$ zachodzi $f(g(x)) = g(f(x))$. Uzasadnij, że dla dowolnego gładkiego i G-ekwiwariantnego odwzorowania $f : M \to N$ odwzorowanie $f_G : M/G \to N/G$ zadane przez $f_G(G(x)) := G(f(x))$ jest dobrze określone i gładkie. Ponadto, jeśli f jest dyfeomorfizmem, to f_G też jest dyfeomorfizmem.
25. Niech v_1, v_2 będą liniowo niezależnymi wektorami w R^2. Rozważmy działanie grupy Z^2 na R^2 zadane w zapisie wektorowym przez $(k, m)(x) = x + k \cdot v_1 + m \cdot v_2$. Uzasadnij, że jest to wolne i właściwie nieciągłe działanie przez dyfeomorfizmy. Oznaczając taką grupę dyfeomorfizmów przez $Z \cdot v_1 \oplus Z \cdot v_2$ uzasadnij też, że dla różnych par wektorów v_1, v_2 rozmaitości ilorazowe $R^2/(Z \cdot v_1 \oplus Z \cdot v_2)$ są dyfeomorficzne.
26. Niech $f : M \to M$ będzie dyfeomorfizmem rozmaitości różniczkowalnej M. Rozważmy działanie grupy Z na produkcie $M \times R$ zadane przez $k(x, t) := (f^k(x), t + k)$ (stosujemy tu konwencję, że $f^0 = id_M$). Uzasadnij, że powyższe działanie jest wolnym i właściwie nieciągłym działaniem przez dyfeomorfizmy. Iloraz $(M \times R)/Z$ tego działania oznaczmy przez $(M \times R)/\langle (f, t + 1) \rangle$.
27. Niech S będzie rozmaitością ilorazową działania Z na R przez $k(t) = t + k$. Pokaż, że rzutowanie $\pi : M \times R \to R$ jest wtedy Z-ekwiwariantne względem działania Z na $M \times R$ opisanego w zadaniu 20. Pokaż też, że indukowane odwzorowanie $\pi_Z : (M \times R)/\langle (f, t+1) \rangle \to R/Z$ ma rząd 1 w każdym punkcie.
28. Dyfeomorfizmy $f_0, f_1 : M \to M$ nazywamy *izotopijnymi*, jeśli istnieje gładko zależna od parametru t rodzina dyfeomorfizmów $f_t : M \to M$ "łącząca" f_0 z f_1. Uzasadnij, że jeśli dyfeomorfizmy f_0, f_1 są izotopijne, to rozmaitości $M \times R/\langle (f_i, t + 1) \rangle$ są dyfeomorficzne. Wskazówka: możesz użyć pomocniczej funkcji gładkiej $g : [0, 1] \to [0, 1]$ stale równej 0 na otoczeniu 0, i stale równej 1 na otoczeniu 1.