ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWALNE. LISTA 4.

Potoki pól wektorowych

1. Znajdź trajektorie pól wektorowych $X(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, $Y(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$, $Z(x,y) = (-y-x)\frac{\partial}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial}{\partial y}$ na płaszczyźnie. Czy są to pola zupełne? Opisz (lokalne?) półgrupy dyfeomorfizmów generowane przez te pola.
2. Pole X znika w punkcie p. Uzasadnij, że jeśli φ_t^X jest potokiem tego pola, to $\varphi_t^X(p) = p$ dla dowolnego t, dla którego lewa strona jest określona.
3. Sprawdź, że $\varphi_t(x,y) = (e^t x, e^t y)$ jest jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów płaszczyzny R^2. Znajdź pole wektorowe będące generatorem tej grupy. Zrób to samo dla $\psi_t(x,y) = (x+t, y+2xt+t^2)$.
4. Czy dwie różne trajektorie pola X mogą się przecinać?
5. X jest polem zupełnym na rozmaitości M. Uzasadnij, że jeśli c jest stałą, to pole cX jest też zupełne. Wyraź potok φ_t^{cX} pola cX przy pomocy potoku φ_t^X pola X.
6. Wiadomo, że na spójnej rozmaitości M dowolne dwa różne punkty należą do wnętrza trajektorii pewnego pola wektorowego X (specjalnie dobranego dla tych dwóch punktów). Korzystając z tego faktu uzasadnij, że dowolne dwa punkty $p \neq q$ spójnej rozmaitości M zawierają się w pewnym spójnym otoczeniu mapowym $U \subset M$ (z atlasu maksymalnego).
7. Podaj przykład pola wektorowego na R^2 posiadającego trajektorię, która przy $t \to \infty$ spiralnie zbliża się do ustalonego okręgu na R^2, też będącego trajektorią tego pola. Wskazówka: może być wygodne wyrażenie takiego pola we współrzędnych biegunowych.
8. Podaj przykład pola wektorowego na R^2 niezupełnego.
9. Podaj przykłady gładkich rodzin dyfeomorfizmów $\{\varphi_t\}_{t\in R}$, np. dla R^2, które nie są jednoparametrowymi grupami dyfeomorfizmów.

Derywacje i komutator

10. Uzasadnij, że jeśli X, Y są polami wektorowymi na rozmaitości M, to operator $XY : C^\infty M \to C^\infty M$ na ogół nie jest derywacją. Przy jakich założeniach na X i Y operator ten jest derywacją w punkcie $p \in M$?
11. Wyprowadź podane na wykładzie algebraiczne własności komutatora.
12. Sprawdź, że potoki pól wektorowych na R^2:

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},\ Y(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

komutują, a następnie sprawdź, że komutator tych pól jest polem zerowym.

13. Uzasadnij, że gdy f jest dyfeomorfizmem, to $[df(X), df(Y)] = df([X,Y])$.

Pochodna Liego

14. Uzasadnij, że jeśli X jest polem wektorowym na R^n o stałych współczynnikach, zaś Y jest dowolnym polem, to pochodna Liego $L_X Y$ jest równa pochodnej kierunkowej $D_X Y$ w każdym punkcie $x \in R^n$.
15. Wyprowadź następujące własności pochodnej Liego:
    (a) $L_X Y = -L_Y X$; (b) $L_X[Y,Z] = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z]$;
    (c) $L_X(Y+Z) = L_X Y + L_X Z$; (d) $L_{X+Y} Z = L_X Z + L_Y Z$;
    (e) $L_X(fY) = Xf \cdot Y + f \cdot L_X Y$; (f) $L_{fX} Y = f \cdot L_X Y - Yf \cdot X$.
16. Znajdź ogólną lokalną postać dwóch komutujących pól wektorowych na otoczeniu punktu $p \in M$, w którym pole X jest niezerowe. Wskazówka: wyprostuj lokalnie pole X oraz znajdź ogólną postać komutującego z nim pola Y.
17. [Pochodna Liego z różniczki funkcji] Określmy $L_X(df)$ poprzez
    $L_X(df)(p)(Y) := d/dt|_{t=0} df \circ d\varphi_t^X(Y)$ dla $Y \in T_pM$.
    (a) Uzasadnij, że $L_X(df)(p)$ jest funkcjonałem liniowym na T_pM.
    (b) Uzasadnij, że $L_X(df) = d(Xf)$.