ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWALNE. LISTA 5.

Podrozmaitości

1. Uzasadnij, że jśli $S^n = \{x \in R^{n+1} : |x| = 1\}$, to dla każdego $k < n+1$ podzbiór $S^n \cap (R^k \times \{0, \ldots, 0\})$ jest podrozmaitością w S^n.
2. Czy podrozmaitość w podrozmaitości jest podrozmaitością wyjściowej rozmaitości? Odpowiedź uzasadnij.
3. Niech N będzie podrozmaitością w M, zas $f : M \to P$ gładkim odwzorowaniem rozmaitości. Uzasadnij, że obcięcie f do N jest gładkim odwzorowaniem $N \to P$.
4. Dana jest domknięta podrozmaitość $N \subset M$. Uzasadnij, że dowolna funkcja gładka $h : N \to R$ rozszerza się do gładkiej funkcji $F : M \to R$. Wskazówka: wykorzystaj odpowiedni rozkład jedności.
5. Uzasadnij za pomocą odpowiedniego przykładu, że założenie domkniętości w poprzednim zadaniu jest istotne.
6. Uzasadnij, że odwzorowanie $f : S^2 \to R^4$ określone wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$ indukuje różniczkowalne włożenie płaszczyzny rzutowej $RP^2 = S^2/Z_2$ w R^4.
7. Uzasadnij, że zamknięta (tzn. zwarta i bez brzegu) rozmaitość wymiaru $n > 0$ nie da się zanurzyć w R^n.
8. Posługując się rozkładem jedności uzasadnij, że każde gładkie pole wektorowe na podrozmaitości domkniętej można rozszerzyć do gładkiego pola wektorowego na całej rozmaitości.
9. Niech $f : R^n \to R$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots x_n^2$. Uzasadnij, że 1 jest wartością regularną tej funkcji, zaś 0 nie jest.
10. Wykaż, że równanie $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ definiuje podrozmaitość w R^3.
11. Uzasadnij, że równania $x + y + z = 0$, $xyz = 2$ określają podrozmaitość w R^3, jeśli usuniemy punkty $(-1, -1, 2)$, $(-1, 2, -1)$ i $(2, -1, -1)$.
12. Uzasadnij, że dla $k < n$ zbiór M_n^k macierzy $n \times n$ rzędu k jest podrozmaitością w R^{n^2}.
13. Torus T powstaje przez obrót okręgu $(x-2)^2 + y^2 = 1$ (leżącego w płaszczyźnie Oxy w przestrzeni) wokół osi Oy. Skonstruuj funkcję $f : R^3 \to R$ o wartości regularnej 0 taką, że torus T jest prznciwobrazem zera przez tą funkcję.
14. Okrąg K dany wzorem $(x-2)^2 + y^2 = 1$ leży na płaszczyźnie Oxy w przestrzeni $Oxyz$. Skonstruuj funkcję $f : R^3 \to R^2$ o wartości regularnej $(0, 0)$, dla której okrąg K jest przeciwobrazem punktu $(0, 0)$.
15. Uzasadnij, że zbiory SL_nR macierzy o wyznaczniku 1 oraz $O(n)$ macierzy ortogonalnych są podrozmaitościami w zbiorze R^{n^2} wszystkich rzeczywistych macierzy $n \times n$.
16. Uzasadnij, że rozmaitość (grupa) SL_2R jest dyfeomorficzna z $S^1 \times R^2$. Uzasadnij, że działanie grupowe (mnożenie macierzowe) jest działaniem różniczkowalnym (jako odwzorowanie $SL_2R \times SL_2R \to SL_2R$).
17. Niech $N \subset M$ będzie spójną (drogowo) podrozmaitościa, zaś $f : M \to R$ gładką funkcją rzeczywistą. Uzasadnij, że $f|_N$ jest stała wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $p \in N \subset M$ obcięcie różniczki $df_p|_{T_pN}$ jest funkcjonałem zerowym.
18. N jest podrozmaitością w M, zaś X jest polem wektorowym na M takimi że dla wszystkich punktów $q \in N$ zachodzi $X(q) \in T_qN$. Niech φ_t będzie potokiem pola X na rozmaitości M. Uzasadnij, że ze jeśli $q \in N$, to

(1) $\varphi_t(q) \in N$ dla dostatecznie małych t wokół zera;
(2) ponadto, jeśli N jest podrozmaitością domkniętą, to $\varphi_t(q) \in N$ dla każdego t, dla którego $\varphi_t(q)$ jest określone.

19. Uzasadnij na podstawie definicji komutatora i pochodnej Liego, ale nie korzystając z ich równości, że jeśli N jest podrozmaitością w M, zaś X, Y są polami wektorowymi na M takimi że dla wszystkich punktów $q \in N$ zachodzi $X(q) \in T_qN$ i $Y(q) \in T_qN$, to dla wszystkich takich punktów mamy $L_XY(q) \in T_qN$ oraz $[X,Y](q) \in T_qN$.
20. Niech $p : TM \to M$ będzie naturalnym rzutowaniem, zaś $N \subset M$ podrozmaitością. Uzasadnij, że $W := p^{-1}(N)$ jest podrozmaitością w TM, zaś TN jest podrozmaitościa w W.
21. Niech q będzie wartością regularną gładkiego odwzorowania $f : M \to N$ i niech $W = f^{-1}(q)$. Uzasadnij, że dla dowolnego $p \in W$ zachodzi $T_pW = \ker(df_p : T_pM \to T_qN)$.
22. Wykresem Γ gładkiego przekształcenia $f : M \to N$ nazywamy zbiór wszystkich par $(x, y) \in M \times N$ dla których $f(x) = y$. Udowodnij, że Γ jest podrozmaitością w $M \times N$, i że przestrzeń styczna $T_{(x,y)}\Gamma \subset T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$ jest równa wykresowi różniczki $df_x : T_xM \to T_yN$.
23. Rozważmy grupę SL_2R jako podrozmaitość w R^4. Dla punktu (macierzy) $A \in SL_2R$ przestrzeń styczna T_ASL_2R jest podprzestrzenią w R^4. Opisz tą podprzestrzeń.

Nieco trudniejsze zadania

24. Uzasadnij, że jeśli odwzorowanie $f : M \to N$ jest różniczkowalne, $\dim N \leq \dim M$, Q jest podrozmaitością z brzegiem w M, zaś każdy punkt Q jest wartością regularną dla f, to przeciwobraz $f^{-1}(Q)$ jest podrozmaitością z brzegiem w M.
25. Niech X będzie zwartą rozmaitością gładką. Posługując się rozkładem jedności skonstruuj różnowartościową immersję $i : X \to R^N$ dla pewnego (dużego) N. W ten sposób uzasadnisz, że każda zwarta rozmaitość jest dyfeomorficzna z pewną podrozmaitością w pewnym R^N.
26. Uzasadnij, że równanie zespolone $z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 1$ zadaje w C^n podrozmaitość. Uzasadnij, że ta podrozmaitość jest dyfeomorficzna z wiązką styczną TS^{n-1} sfery $(n-1)$-wymiarowej.
27. Uzasadnij, że $TS^n \times R \cong S^n \times R^{n+1}$. Wykorzystaj fakt, że S^n jest w naturalny sposób podrozmaitością w R^{n+1}.