ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWALNE
LISTA 6.

Orientowalność i orientacje rozmaitości

0. Uzasadnij, że dowolna ciągła modyfikacja bazy $(b_1, \ldots, b_n)$ w n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V prowadzi do bazy z tej samej klasy abstrakcji orientacji.
1. Uzasadnij, że każdy otwarty podzbiór rozmaitości orientowalnej jest rozmaitością orientowalną.
2. Uzasadnij, że brzeg orientowalnej rozmaitości jest orientowalny.
3. Uzasadnij, że produkt orientowalnych rozmaitości jest orientowalny.
4. Pokaż, że spójna orientowalna rozmaitość posiada dokładnie 2 orientacje. Wskazówka: można (i warto) skorzystać z tego, że spójna rozmaitość jest drogowo spójna.
5. Niech M będzie rozmaitościa wymiaru n, i załóżmy, że na M istnieją pola wektorowe $X_1, \ldots, X_n$ liniowo niezależne w każdym punkcie $p \in M$. Uzasadnij, że M jest orientowalna.
6. Uzasadnij, że w dowolnym wymiarze $n \geq 1$ sfera S^n jest rozmaitością orientowalną. Dobierz zbiór map zadających na S^n orientację.
7. Uzasadnij, że dla n parzystych odwzorowanie antypodyczne $a : S^n \to S^n$ zadane przez $a(x) = -x$ zmienia orientację, zaś dla n nieparzystych – nie zmienia.
8. Niech M i N będą spójnymi orientowalnymi rozmaitościami, i niech $F : M \to M$ oraz $g : N \to N$ będą dyfeomorfizmami. Zbadaj kiedy dyfeomorfizm produktowy $f \times g : M \times N \to M \times N$ zachowuje orientację, w zależności od tego, czy f i g zachowują orientacje, czy nie.
9. Uzasadnij, że dla dowolnej rozmaitości M jej wiązka styczna TM jest orientowalna.
10. Udowodnij, że rozmaitość M jest nieorientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy w przestrzeni baz w wiązce stycznej TM istnieje ciągła krzywa $b(t) : t \in [0, 1]$ taka, że $b(0)$ oraz $b(1)$ są bazami w tej samej przestrzni stycznej T_pM, ale wyznaczają one w tej przestrzeni przeciwne orientacje.
11. Uzasadnij, że produkt rozmaitości orientowalnej z nieorientowalną jest nieorientowalny. A jak będzie z produktem dwóch rozmaitości nieorientowalnych?