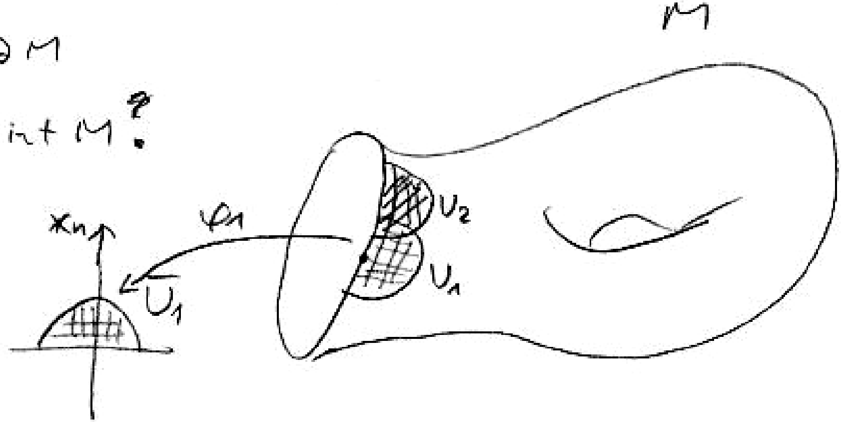
ROZKŁAD JEDNOŚCI na rozmaitości gładkiej

Motywacja: jak uzasadnić, że na każdej rozmaitości z brzegiem M istnieje gładka funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ taka, że

(1) $f(p) = 0$ dla $p \in \partial M$

(2) $f(p) > 0$ dla $p \in \operatorname{int} M$?



Lokalnie na zbiorze mapy U_α można taką funkcję zadać przez: $\bar{f}_\alpha : \bar{U}_\alpha \to \mathbb{R}$, $\bar{f}_\alpha(x_1, \dots, x_n) = x_n$, $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$, $f_\alpha = \bar{f}_\alpha \circ \varphi_\alpha$.

Ale jak „posklejać" te lokalne funkcje f_α do jednej gładkiej funkcji $f : M \to \mathbb{R}$?

ROZKŁAD JEDNOŚCI na rozmaitości gładkiej

<u>Def 1.</u> Rodzina $\{A_\alpha\}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X jest <u>lokalnie skończona</u> jeśli każdy $p \in X$ posiada otwarte otoczenie U_p t.że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu spośród A_α.

<u>Def 2.</u> Pokrycie $\{V_\beta\}$ przestrzeni X $\boxed{\text{zbiorami otwartymi}}$ nazywamy <u>rozdrobnieniem</u> pokrycia $\{U_\alpha\}$ $\boxed{\text{zb. otwartymi}}$, jeśli każdy V_β zawiera się w pewnym U_α.

UWAGA. Relacja bycia rozdrobnieniem jest przechodnia. Oznaczając ją przez $\{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\}$ mamy więc, że $\{W_\gamma\} \prec \{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\} \Rightarrow \{W_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$.

<u>Def 3.</u> Przestrzeń topologiczna X jest <u>parazwarta</u> jeśli każde pokrycie $\{U_\alpha\}$ zbiorami otwartymi posiada lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$.

<u>LEMAT 1.</u> Każda rozmaitość topologiczna jest parazwarta.

Dowód pominięty. Patrz [Lee, str. 36-37]. Dowód wykorzystuje w istotny sposób lokalną zwartość - czyli istnienie otoczeń punktów <u>prezwartych</u> (o domknięciu zwartym) - co wynika z lokalnej euklidesowości i Hausdorffowości.

<u>UWAGI</u>: (1) Zawsze można przyjąć, że rozdrobnienie o którym mowa w tezie LEMATU 1 składa się ze zbiorów mapowych i prezwartych.

<u>d-d</u>: niech $\{U_\alpha\}$ wyjściowe pokrycie M. Łatwo znaleźć rozdrobnienie $\{U'_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$ złożone ze zbiorów prezwartych mapowych. Stosując LEMAT 1 do $\{U'_\gamma\}$ dostajemy lokalnie skończone rozdrobnie $\{V_\beta\} \prec \{U'_\gamma\}$, które jest też rozdrobnieniem $\{U_\alpha\}$. Ponadto, każdy V_β zawiera się w pewnym U'_γ, więc jest mapowy i prezwarty. $\square$

(2) Każda lokalnie skończona rodzina podzbiorów przezwartych $\{A_\alpha\}$ ma następującą własność:

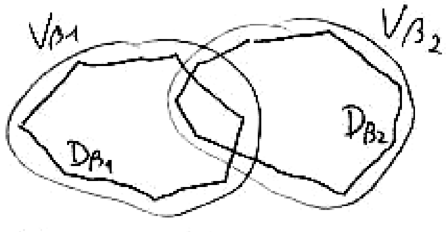
dla każdego A_{α_0} podrodzina $\{A_\alpha : A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$ jest skończona.

d-d gdyby ta podrodzina była nieskończona, moglibyśmy wybrać ciąg $A_{\alpha_i} : i \in \mathbb{N}$ z tej rodziny, oraz ciąg punktów $x_i \in A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_0}$. Ciąg x_i ma punkt skupienia w zwartym $cl(A_{\alpha_0})$, oznaczmy go p.

Dowolne otoczenie otwarte U_p punktu p zawiera nieskończenie wiele x_i, więc przecina niepusto nieskończenie wiele A_{α_i}

- sprzeczność z lokalną skończonością $\{A_\alpha\}$. □

(3) Mając już mapowość i przeliczalność zbiorów z rozdrobnienia $\{V_\beta\}$, jak w UWADZE (1),
możemy dodatkowo zapewnić sobie istnienie zwartych $D_\beta \subset V_\beta$ takich, że $\bigcup_\beta D_\beta = M$ (w dalszym ciągu pokrywają M).



dowód: o każdym zbiorze V_β możemy myśleć jak o otwartym podzbiorze w $\mathbb{R}^n$ (utożsamiając go ze zbiorem $\tilde{V}_\beta = \varphi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^n$, gdzie (V_β, φ_β) jest mapą).

- Każdy V_{β_0} jest wstępującą sumą mniejszych zbiorów $V_{\beta_0,k} : k \in N$ otwartych, których zwarte domknięcia $cl(V_{\beta_0,k}) \subset V_{\beta_0}$

$$(\text{np. } V_{\beta_0,k} = \overset{\circ}{B}(x_0, k) \cap \{x \in V_{\beta_0} : d(x, V_{\beta_0}^c) > \tfrac{1}{k}\}$$

otw. kula w $\mathbb{R}^n$ o środku $x_0 \in V_{\beta_0} \subset \mathbb{R}_n$ i promieniu k; odległość w $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}^n \setminus V_{\beta_0}^c$

- Niech $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}$ zbiory z $\{V_\beta\}$ niepusto przecinające V_{β_0} (jest ich skończenie wiele dzięki UWADZE (2))

Wówczas $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}$ wraz z $V_{\beta_0,k} : k \in N$ stanowią pokrycie zwartego $cl(V_{\beta_0})$.

~~Fakt~~ Można z niego wybrać skończone podpokrycie postaci $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_m}, V_{\beta_0,k_0}$.

Oznacza to, że zastępując w $\{V_\beta\}$ zbiór V_{β_0} przez V_{β_0,k_0} dostajemy nowe pokrycie M (z tym że $cl(V_{\beta_0,k_0}) \subset V_{\beta_0}$)

Powtarzamy to kolejno (indukcyjnie) dla wszystkich V_β i bierzemy $D_\beta := cl(V_{\beta,k})$. $\square$

VERTE →

PODSUMOWUJĄC:

Dla dowolnego pokrycia otwartego $\{U_\alpha\}$ rozmaitości topologicznej M istnieje ~~rozdr~~ lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$ składające się ze ~~pos~~ zbiorów mapowych i prezwartych, oraz rodzina $\{D_\beta\}$ zwartych podzbiorów $D_\beta \subset V_\beta$, która dalej jest pokryciem M.

Dotyczy to także rozmaitości z brzegiem.

Def 4 Dla funkcji rzeczywistej $f: X \to \mathbb{R}$ określamy jej nośnik

$$\mathrm{supp}(f) := \mathrm{cl}(\{x \in X : f(x) \neq 0\}).$$

(a także $\Omega \subset \mathbb{R}^n$)

FAKT z $\mathbb{R}^n$. Dla dowolnego otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i dowolnego zwartego $D \subset \Omega$ istnieje gładka funkcja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ taka, że

(1) $f \geq 0$ (2) $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega$ (3) $f(x) > 0$ dla $x \in D$. □

TWIERDZENIE (o rozkładzie jedności)

Dla każdego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}$ rozmaitości gładkiej M istnieje rodzina $\{f_j\}$ gładkich funkcji $f_j: M \to \mathbb{R}$ takich że

(1) $f_j \geq 0$

(2) każdy nośnik $\mathrm{supp}(f_j)$ zawiera się w pewnym U_α

(3) nośniki $\{\mathrm{supp}(f_j)\}$ tworzą lokalnie skończone pokrycie M

(4) $\forall x \in M \quad \sum_j f_j(x) = 1$ (UWAGA: Suma po lewej jest skończona lokalnie wokół każdego x)

Dowód

- Niech $\{V_j\} \prec \{U_\alpha\}$ lokalnie skończone pokrycie otwartymi przezwartymi zbiorami mapowymi, i niech $D_j \subset V_j$ zwarte, dalej pokrywające M.
- Dzięki FAKTOWI z $\mathbb{R}^n$, $\forall j$ istnieje gładka funkcja $h_j: M \to \mathbb{R}$ t.że (1) $h_j \geq 0$ (2) $\mathrm{supp}(h_j) \subset V_j$ (3) $h_j(x) > 0$ dla $x \in D_j$. VERTE
- Niech $h(x) := \sum_j h_j(x)$, co ma sens bo nośniki $\mathrm{supp}(h_j)$ tworzą rodzinę lokalnie skończoną.

Z tej lokalnej skończoności nośników wynika też, że h jest gładka na M.

Mamy też $h(x) > 0 \quad \forall x \in M$ bo D_j pokrywają M. VERTE

• Określmy $f_i(x) = \dfrac{h_j(x)}{h(x)}$, $f_i : M \to \mathbb{R}$.

f_i gładka na M, $supp(f_i) = supp(h_j) \subset V_j$

więc rodzina $\{supp(f_i)\}$ lokalnie skończona

i każdy $supp(f_i)$ zawiera się w pewnym U_α

$$\sum_j f_j(x) = \sum_j \frac{h_j(x)}{h(x)} = \frac{\sum_j h_j(x)}{h(x)} = \frac{h(x)}{h(x)} = 1 \quad \forall x \in M. \quad \square$$

Def 5. Rodzinę funkcji $\{f_i\}$ jak w tezie TWIERDZENIA będziemy nazywać rozkładem jedności wpisanym w pokrycie $\{U_\alpha\}$.

VERTE 2 [TO powinno być dokładniej wyjaśnione]

h_j definiujemy tak

• rozważmy mapę $\varphi_j : V_j \to \overline{V_j} \subset \mathbb{R}^n$, rozważmy $\overline{D_j} = \varphi_j(D_j) \subset \overline{V_j}$ zwarty

• FAKT z $\mathbb{R}^n$ dostarcza nam funkcji $\overline{h_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $supp(\overline{h_j}) \subset \overline{V_j}$, $\overline{h_j}(x) > 0$ dla $x \in \overline{D_j}$

• $$h_j(x) = \begin{cases} \overline{h_j} \circ \varphi_j(x) & \text{dla } x \in V_j \\ 0 & \text{dla } x \notin V_j \end{cases}$$

• $h_j : M \to \mathbb{R}$ jest gładka bo:

(1) wystarczy pokazać że jest gładka na pewnym otoczeniu każdego punktu

(2) na otoczeniach punktów z V_j (np. na samym V_j) oczywiście jest gładka

(3) dla $p \notin V_j$ istnieje otwarte otoczenie U_p rozłączne z $supp(h_j)$, a więc otwarte otoczenie gdzie h_j jest stale równe zero, stąd też gładka.

ZASTOSOWANIA ROZKŁADÓW JEDNOŚCI

- Ogólnie, służą one do konstruowania gładkich funkcji określonych na całym M, spełniających pewne wymagania, z lokalnych fragmentów takich funkcji zdefiniowanych w mapowych otoczeniach ze pomocą lokalnych współrzędnych.

- Z pomocą rozkładów jedności będziemy też „globalizować" inne obiekty na rozmaitościach: pola wektorowe, metryki Riemanna, formy różniczkowe, itp.

PRZYKŁAD. Niech F_1, F_2 · domknięte rozłączne podzbiory gładkiej rozmaitości M. Wówczas istnieje gładka funkcja $f: M \to [0,1]$ taka, że $f|_{F_1} \equiv 1$, $f|_{F_2} \equiv 0$.

UWAGA: jest to interesujące nawet gdy $M = \mathbb{R}^n$.

d-d: Niech $U_i = M \setminus F_i$, $\{U_1, U_2\}$ - pokrycie M. Niech $\{f_i\}$ - rozkład jedności wpisany w $\{U_1, U_2\}$.

Określmy $f(x) = \sum_{supp(f_j) \subset U_2} f_j(x)$.

- Dla $x \in F_1$ wszystkie nośniki $supp(f_j)$ · zawierające x zawierają się w U_2

Zatem dla takich x $f(x) = \sum_j f_j(x) = 1$.

- Dla $x \in F_2$ nośniki $supp(f_j)$ zawierające x nie zawierają się w U_2

Zatem $f(x) = 0$. $\square$

[Sukcesywnie, we wcześniejszych i następnych wykładach, będziemy poznawać dalsze zastosowania rozkładów jedności.]

PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA ROZKŁADÓW JEDNOŚCI

Wracamy do pytania o istnienie gładkiej funkcji $f: M \to \mathbb{R}$:

$f(p)=0$ dla $p \in \partial M$ oraz $f(p)>0$ dla $p \in \operatorname{int} M$.

$\{U_\alpha\}$ - dowolne pokrycie zbiorami mapowymi

$f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ rodzina lokalnych funkcji gładkich t. że

- jeśli $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$ to $f_\alpha = \overline{f_\alpha} \circ \varphi_\alpha$,

  $\overline{f_\alpha} : \overline{U_\alpha} \to \mathbb{R}$, $\overline{f_\alpha}(x_1, \dots, x_n) = x_n$

- jeśli $U_\alpha \cap \partial M = \emptyset$ to $f_\alpha \equiv 1$.

Niech $\{h_\beta\}$ - rozkład jedności wpisany w $\{U_\alpha\}$

Dla każdego β wybieramy $\alpha(\beta)$ t. że $\operatorname{supp}(h_\beta) \subset U_{\alpha(\beta)}$

Definiujemy $h'_\beta = h_\beta \cdot f_{\alpha(\beta)}$ (iloczyn)

$h'_\beta :$ ~~gładka~~ $M \to \mathbb{R}$ gładka

$\operatorname{supp}(h'_\beta) \subset \operatorname{supp}(h_\beta)$

więc rodzina nośników $\{\operatorname{supp}(h'_\beta)\}$ jest lok. skończona

Definiujemy $f(x) = \sum_\beta h'_\beta$.

Z lok skończoności nośników h'_β, f dobrze określona i gładka.

Dla $p \in \partial M$ $\forall \beta$ $h'_\beta(p) = 0$ więc $f(p) = 0$

Dla $p \in \operatorname{int} M$ $\exists \beta : h_\beta(p) > 0$

wtedy $h'_\beta(p) > 0$ oraz $h'_\gamma(p) \geq 0$ dla $\gamma \neq \beta$

więc $f(p) > 0$. $\square$

WERSJA TW. O ROZKŁADZIE JEDNOŚCI

Dla dowolnego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ rozmaitości gładkiej M istnieje rodzina $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ gładkich funkcji $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ takich że

(1) $f_\alpha \geq 0$

(2) $\operatorname{supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha$

(3) nośniki $\{\operatorname{supp}(f_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ tworzą lokalnie skończone pokrycie M

[a więc na ogół wiele spośród $\operatorname{supp}(f_\alpha)$ jest pustych, czyli wiele spośród funkcji f_α jest zerowych]

(4) $\forall x\in M \quad \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = 1$.

Dowód tej WERSJI - szkic

(za pomocą wyjściowej wersji TWIERDZENIA):

Rozważmy rodzinę $\{f_j\}_{j\in J}$ jak w wyjściowej wersji TW.

Dla każdego $j \in J$ wybierzmy $\alpha(j) \in A$ t.że $\mathrm{supp}(f_j) \subset U_{\alpha(j)}$.

Zdefiniujmy

$$f_\alpha = \sum_{j:\alpha(j)=\alpha} f_j .$$

Z lokalnej skończoności nośników $\mathrm{supp}(f_j)$, f_α jest gładka na M.

Oczywiście zachodzi też warunek (4), $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ $\forall x \in M$, oraz $f_\alpha \geqslant 0$ (warunek (1)).

Warunki (2) i (3) łatwo wynikają z następującej dodatkowej obserwacji:

dla dowolnej lokalnie skończonej rodziny podzbiorów P_t w przestrzeni X, $\mathrm{cl}\left(\bigcup_t P_t\right) = \bigcup_t \mathrm{cl}(P_t)$. $\square$