ROZMAITOŚĆ GŁADKA Z BRZEGIEM

- $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ – półprzestrzeń
- $\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, $\operatorname{int} H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$

  brzeg i wnętrze półprzestrzeni
- dla $U \subset H^n$ otwartego określamy $\partial U = U \cap \partial H^n$, $\operatorname{int} U = U \cap \operatorname{int} H^n$.
- dla $U \subset H^n$ otwartego, $f : U \to \mathbb{R}^m$ gładkie gdy jest obcięciem do U gładkiej funkcji $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ otwarty, $U \subset \tilde{U}$, $f = \tilde{f}|U$.

  * pochodne cząstkowe f są oczywiście dobrze określone na $\operatorname{int} U$
  * ze względu na ich ciągłość, są również dobrze określone na ∂U (nie zależą od wyboru rozszerzenia $\tilde{f}$)
  * fakt z analizy: rozszerzenie $\tilde{f}$ istnieje $\iff$ wszystkie pochodne cząstkowe f w $\operatorname{int} U$ w sposób ciągły rozszerzają się do ∂U

DEF. M jest gładką rozmaitością z brzegiem jeśli posiada atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, U_α ~~otwarty~~ w M, $\underset{\text{homeo na obraz}}{\varphi_\alpha : U_\alpha \to H^n}$, $\tilde{U}_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ otwarty w H^n,

odwzorowania przejścia $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$ gładkie

(dokładniej, $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest dyfeomorfizmem pomiędzy tymi otwartymi podzbiorami w H^n).

FAKT. Jeśli w pewnej mapie $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\varphi_\alpha(p) \in \partial H^n$, to w każdej innej mapie (U_β, φ_β) zawierającej p (czyli t.że $p \in U_\beta$) $\varphi_\beta(p) \in \partial H^n$.

d-d: wynika to z tw. o odwzorowaniu otwartym, wraz z nieosobliwością jakobianów odwzorowań przejścia. □

UWAGA. Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem analogiczny fakt wymaga w dowodzie trudnego Tw. Brouwera o niezmienniczości obszaru – analogon tw. o odwzorowaniu otwartym dla ciągłych injekcji.

Def. <u>Brzegiem</u> n-rozmaitości M nazywamy zbiór

$$\partial M = \{p\in M : \text{ w pewnej (każdej) mapie } (U_\alpha,\varphi_\alpha) \text{ zawierającej } p \text{ zachodzi } \varphi_\alpha(p)\in \partial H^n\}.$$

Wnętrzem M nazywamy

$$\operatorname{int} M = \{p\in M : \exists (U_\alpha,\varphi_\alpha) \text{ t.że } \varphi_\alpha(p)\in \operatorname{int} H^n\}.$$

<u>UWAGA</u>: Są to pojęcia związane ze strukturą rozmaitości, nie topologiczne!

FAKT. Wnętrze $\operatorname{int} M$ n-rozmaitości gładkiej M jest n-rozmaitością bez brzegu.

d-d: jako atlas bierzemy $\{(U'_\alpha,\varphi'_\alpha)\}$ gdzie

$$U'_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\operatorname{int}\overline{U_\alpha}),\quad \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha|_{U'_\alpha}.$$
$$= U_\alpha\cap \operatorname{int} M.$$

Odwzorowania przejścia $\varphi'_\alpha(\varphi'_\beta)^{-1}$ są obcięciami $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$, więc są gładkie. $\square$

FAKT. Brzeg ∂M n-rozmaitości gładkiej M jest $(n-1)$-rozmaitością bez brzegu.

d-d: jako atlas bierzemy $\{(U'_\alpha,\varphi'_\alpha)\}$ gdzie

$$U'_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\partial\overline{U_\alpha}) = \underbrace{U_\alpha\cap\partial M}_{\text{otwarte jako obcięcie otwartych}},\quad \varphi'_\alpha : U'_\alpha \to \underbrace{\mathbb{R}^{n-1}}_{=\partial H^n} \text{ określony}$$

przez $\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha|_{U'_\alpha}$. $\square$

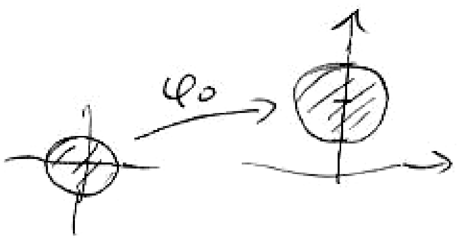
PRZYKŁAD (11). Dysk $D^n=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\le 1\}$ jest n-rozmaitością z brzegiem $\partial D^n = S^{n-1} = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|=1\}$.

Dowód:

Skonstruuję mapy; pominę sprawdzanie gładkości odwzorowań przejścia.

Mapa (U_0,φ_0).

$U_0=\{x : |x|<1\}$. $\varphi_0 : U_0\to \mathbb{H}^n$, $\varphi_0(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{n-1},x_n+2)$

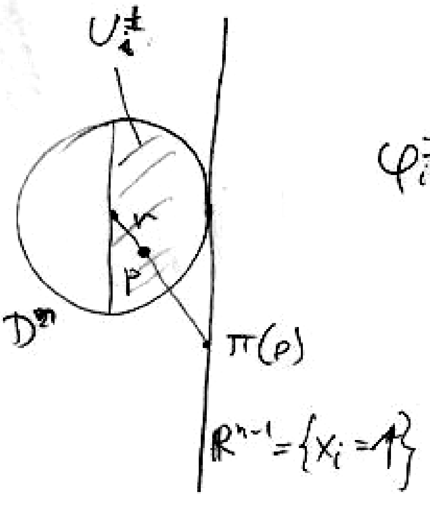


Mapy $(U_i^\pm,\varphi_i^\pm)$.

$U_i^+=\{x\in D^n : x_i>0\}$

$U_i^-=\{x\in D^n : x_i<0\}$

$$\varphi_i^\pm(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i},\underbrace{1-\sum x_i^2}_{=1-r^2}\right)$$

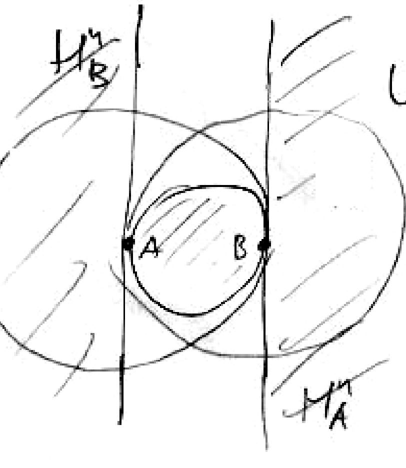


$$\varphi_i^\pm(p) = \big(\underbrace{\pi(p)}_{\in\mathbb{R}^{n-1}},\ \underbrace{1-r^2}_{\in\mathbb{R}^+}\big)\in H^n$$

$$\varphi_i^\pm(U_i^\pm) = \mathbb{R}^{n-1}\times[0,1)$$

otwarty podzbiór w H^n. □

Inny atlas – z 2 map



$U_A=D^n-\{A\}$, $U_B=D^n-\{B\}$

$\varphi_A : U_A\to H^n_A$ – inwersja względem sfery o środku A i promieniu 2

$\varphi_B : U_B\to H^n_B$ – inwersja względem sfery o środku B i promieniu 2. □