ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWALNE

MOTYWACJA: • powierzchnie 

• przestrzenie opisywalne (lokalnie) za pomocą ustalonej skończonej liczby parametrów (np. przestrzenie konfiguracyjne układów fizycznych, przestrzenie obiektów danego rodzaju)

• podzbiory $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ opisywane równaniami algebraicznymi (np. $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$ w $\mathbb{C}^3$)

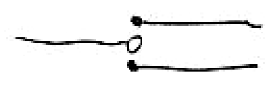
• Analiza na takich zbiorach/przestrzeniach (różniczkowanie funkcji i odwzorowań, równania różniczkowe, analiza wektorowa, itp.)

ROZMAITOŚĆ (TOPOLOGICZNA).

Def: Przestrzeń topologiczna M jest n-wymiarową rozmaitością (n-rozmaitością) topologiczną jeśli:

- jest Hausdorffa
- ma przeliczalną bazę topologii
- jest lokalnie euklidesowa wymiaru n, tzn. każdy punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$.

UWAGI:

1. Warunek Hausdorffa wyklucza taką np. patologię: 

Ogólniej, warunek ten mówi że lokalnie topologiczne własności z $\mathbb{R}^n$ przenoszą się na M. Np. dla

$\varphi: U \to \tilde{U}$ homeomorfizm

(*) dla dowolnego zwartego $\tilde{K}\subset\tilde{U}$ jego odpowiednik $K := \varphi^{-1}(\tilde{K}) \subset U \subset M$ jest domknięty (i zwarty). [ĆW]

2. Warunek przeliczalnej bazy wyklucza by rozmaitości były „zbyt duże”.

Np. nieprzeliczalna suma parami rozłącznych kopii $\mathbb{R}^n$ nie jest rozmaitością. Warunek ten implikuje również własność: każde pokrycie zbiorami

def. Lindelöfa → otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie. [ćw] implikuje też że każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzb. których domknięcia są zwarte.

3. Z topologii wiadomo, że dla $n \neq m$ otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ nie może być [Brouwer 1911] homeomorficzny z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^m$.

Stąd wynika że n jest jednoznacznie przypisane do M i nazywa się wymiarem M, $\dim M = n$.

• implikuje też zanurzalność w $\mathbb{R}^N$ oraz parazwartość (każde otw. pokrycie posiada lokalnie skończone rozdrobnienie)

MAPY, LOKALNE WSPÓŁRZĘDNE, ITP.

Def. Mapą na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U,φ), gdzie U jest otwartym podzbiorem M, zaś $\varphi : U \to \bar{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór w $\mathbb{R}^n$.

• U - zbiór mapowy.

FAKT. Rozmaitość M jest pokryta zbiorami mapowymi.

• (U,φ) jest mapą wokół $p \in M$ jeśli $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$

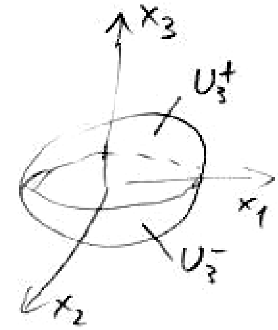
• (U,φ) nazywamy też lokalnymi współrzędnymi na M

rysunkowo

albo (lokalną parametryzacją M (za pomocą n parametrów).

PRZYKŁAD. Sfera $S^n=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2=1\}$.

Dla $i=1,2,\dots,n+1$ otwarte podzbiory:



$$U_i^+=\{x\in S^n : x_i>0\},\quad U_i^-=\{x\in S^n : x_i<0\}$$

pokrywają S^n, bo każdy $x\in S^n$ ma którąś współrzędną niezerową.

Odwzorowanie $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\varphi_i^\pm(x)=(x_1,\dots,x_{i-1},\widehat{x_i},\dots,x_{n+1}) \quad \text{ciągłe}$$

[obcięcie rzutu $\mathbb{R}^{n+1}$ na $\mathbb{R}^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1} : x_i=0\}$]

Obraz $\overline{U_i^\pm}=\varphi_i^\pm(U_i^\pm)=\{(x_1,\dots,x_n) : \sum x_i^2<1\}$ otwarta kula w $\mathbb{R}^n$

$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \overline{U_i^\pm}$ wzajemnie jednoznaczne

Odwzorowanie odwrotne:

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(x_1,\dots,x_n)=\Big(x_1,\dots,x_{i-1},\pm\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2},x_i,\dots,x_n\Big)$$

ciągłe!

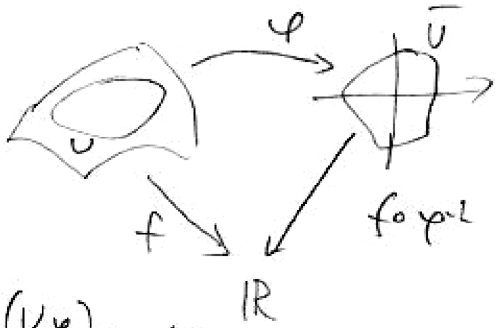
Zatem $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \overline{U_i^\pm}$ homeomorfizmy. $\square$

- Hausdorffowość i przeliczalność bazy dziedziczone z $\mathbb{R}^{n+1}$
- rodzina „map" na S^n, których suma dziedzin pokrywa S^n, implikuje lokalną euklidesowość

ROZMAITOŚCI GŁADKIE (RÓŻNICZKOWALNE)

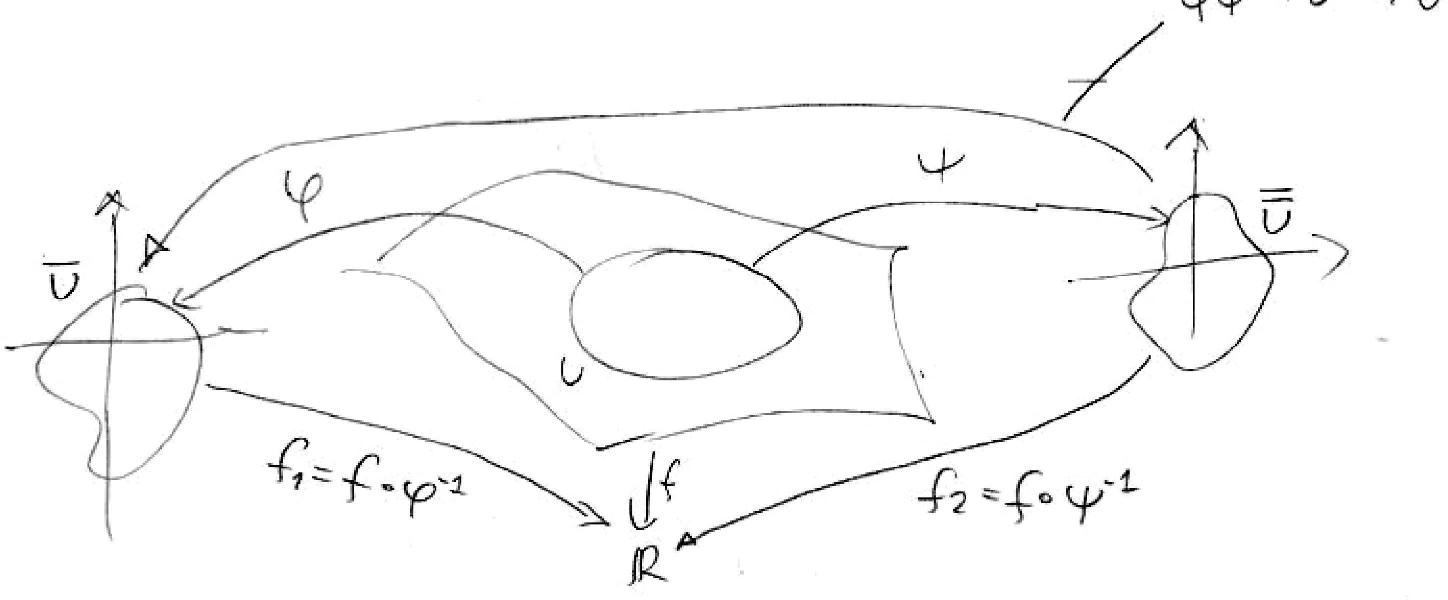
MOTYWACJA:

Dla funkcji: $f: M \to \mathbb{R}$ chcemy rozpoznawać jej różniczkowalność ze pomocą map (U, φ) na M.



- funkcję f wyrażoną w mapie (U,φ) to złożenie $f\circ\varphi^{-1}: \bar{U} \to \mathbb{R}$, $\bar{U} \subset \mathbb{R}^n$
- $f: M \to \mathbb{R}$ gładka jeśli dla każdej mapy (U,φ) na M $f\circ\varphi^{-1}: \bar{U} \to \mathbb{R}$ jest gładka

KŁOPOT - KWESTIA ZGODNOŚCI



$$f_2 = f_1 \circ (\varphi\psi^{-1})$$

Nawet gdy f_1 jest gładkie, to ψ można tak dobrać (na wyjęt) by f_2 nie było gładkie.

Dobre jest więc zażądać, by $\varphi\psi^{-1}$ było gładkim odwzorowaniem.

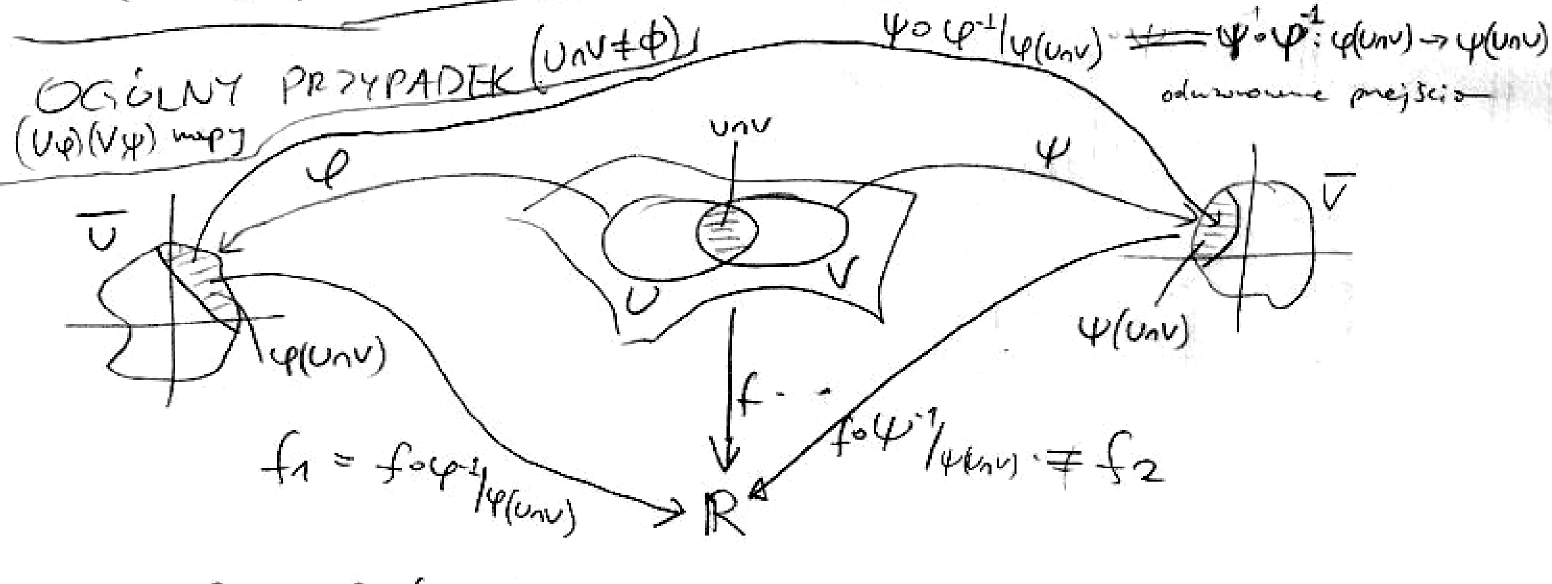
DEF. Mapy $(U,\varphi),(U,\psi)$ na M nazywamy zgodnymi (gładko zgodnymi), jeśli $\varphi\psi^{-1}$ oraz $\psi\varphi^{-1}$ są gładkie.

UWAGI: (1) $\varphi\psi^{-1}$ i $\psi\varphi^{-1}$ nazywamy odwzorowaniami przejścia od jednej mapy do drugiej

(2) $\varphi\psi^{-1}: \bar{\bar{U}} \to \bar{U}$ oraz $\psi\varphi^{-1}: \bar{U} \to \bar{\bar{U}}$ są gładkimi wzajemnie do siebie odwrotnymi bijekcjami. Takie odwzorowanie nazywamy dyfeomorfizmem pomiędzy otwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$. Zauważmy, że w każdym punkcie Jakobian (wyznacznik macierzy pochodnych cząstkowych) jest wtedy niezerowy. [ćw]

(3) $f\circ\varphi: \bar{U} \to \mathbb{R}$ gładkie $\iff$ $f\circ\psi: \bar{\bar{U}} \to \mathbb{R}$ gładkie.

OGÓLNY PRZYPADEK $(U\cap V \neq \emptyset)$, $(U,\varphi)(V,\psi)$ mapy



$$f_2 = f_1\circ(\psi\varphi^{-1})$$

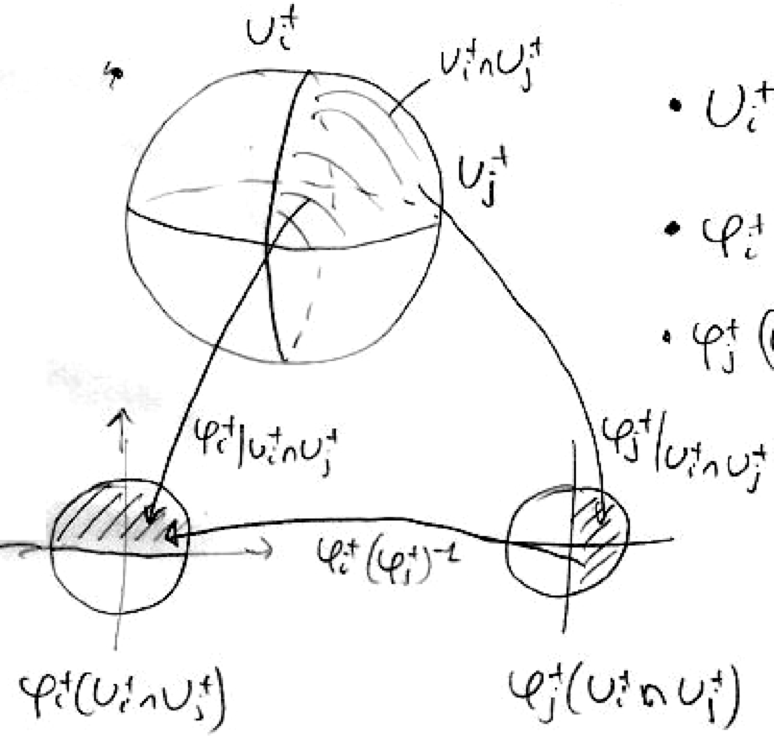
DEF. Mapy $(U,\varphi)(V,\psi)$ nazywamy zgodnymi, jeśli albo $U\cap V = \emptyset$, albo odwzorowanie przejścia $\varphi\psi^{-1}: \psi(U\cap V) \to \varphi(U\cap V)$ oraz $\psi\varphi^{-1}: \varphi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$ są gładkie ($\equiv$ są dyfeomorfizmami otwartych podzbiorów $\varphi(U\cap V)$ i $\psi(U\cap V)$ w $\mathbb{R}^n$).

DEF. Gładkim atlasem A na rozmaitości M nazywamy zbiór map $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ takich że

- $\{U_\alpha\}$ pokrywa całą M
- każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne.

PRZYKŁAD. Rodzina map $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) : i=1,\dots,n+1\}$ na S^n poprzednio opisana.

Zbadajmy np. zgodność $(U_i^+, \varphi_i^+), (U_j^+, \varphi_j^+)$, $i<j$.



- $U_i^+ \cap U_j^+ = \{x \in S^n : x_i > 0, x_j > 0\}$
- $\varphi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 < 1,\ x_{j-1} > 0\}$
- $\varphi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\ \ x_i > 0\}$

$$\underset{\{|x|<1,\ x_i>0\}}{(x_1, \dots, x_n)} \xrightarrow{(\varphi_j^+)^{-1}} (x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n) \xrightarrow{\varphi_i^+}$$

$$\xrightarrow{\varphi_i^+} (x_1, \dots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \dots, \underset{\{|x|<1,\ x_{j-1}>0\}}{x_{j-1}}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$

$$\varphi_i^+(\varphi_j^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \dots, x_n)$$ gładkie!

Def. Rozmaitością gładką nazywamy parę (M,A), gdzie M jest rozmaitością topologiczną, zaś A jest pewnym atlasem gładkim na M.

UŚCIŚLENIE / UZUPEŁNIENIE.

Czasami różne atlasy na topologicznej rozmaitości M mogą zadawać tą samą rozmaitość gładką. Np. $M = \mathbb{R}^n$ jedną mapą $\{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\} = A_1$ lub z wieloma mapami $\{(B_x(r), id_{B_x(r)}) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\} = A_2$

ćw. Atlasy A_1, A_2 na M są zgodne iff ich suma $A_1 \cup A_2$ jest atlasem na M.

Def. Niech A - atlas na M.

(1) mapa (U,φ) jest zgodna z A jeśli jest zgodna z każdą mapą $(V,\psi) \in A$.

(2) Dwa atlasy A_1, A_2 na M są zgodne jeśli każda mapa z A_1 jest zgodna z A_2

Zgodność atlasów jest relacją zwrotną i przechodnią [ćw]

Zgodne atlasy zadają tą samą strukturę rozmaitości gładkiej na M.
[tą samą strukturę gładką na rozmaitości topologicznej M]
Zgodne atlasy można zsumować do jednego większego atlasu.

• Inny spotykany w podręcznikach sposób poradzenia sobie z tym zagadnieniem — atlasy maksymalne.

Def. A jest <u>atlasem maksymalnym</u>, jeśli każda mapa zgodna z A należy do A.

FAKT. Każdy atlas A na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym, złożonym ze wszystkich map zgodnych z A. [ćw]
(Zgodne atlasy zawierają się w tym samym atlasie maksymalnym).

Rozmaitość gładką definiuje się jako (M,A) gdzie M - rozmaitość topologiczna, A - pewien gładki atlas maksymalny.

Doprecyzowanie o funkcjach gładkich:

Def. Funkcja $f: M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem atlasu $\mathcal{A}$ na M jeśli
$\forall (U,\varphi) \in \mathcal{A}$ $f \circ \varphi^{-1}: U \to \mathbb{R}$ jest gładka.

Fakt. (1) Jeśli $f: M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem $\mathcal{A}$, zaś (U,φ) jest mapą zgodną z $\mathcal{A}$, to $f \circ \varphi^{-1}: U \to \mathbb{R}$ gładka. [ćw]

(2) Jeśli $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ są zgodnymi atlasami, to $f: M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem $\mathcal{A}_1$ $\Leftrightarrow$ jest gładka względem $\mathcal{A}_2$ $\Leftrightarrow$ [ćw]
jest gładka względem atlasu maksymalnego $\mathcal{A}_{max}$ zawierającego $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$.

Def. Niech M rozmaitość gładka. $f: M \to \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli f gładka względem dowolnego atlasu wyznaczającego na M daną strukturę gładką.

WARIANTY POJĘCIA ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWALNEJ:

- mapy $(U,\varphi)(V,\psi)$ są C^k-zgodne jeśli $\varphi\circ\psi^{-1}$ i $\psi\varphi^{-1}$ są funkcjami klasy C^k (ciągłe pochodne wszystkie rzędów $\leq k$).
- C^k-atlas – mapy C^k-zgodne – określa strukturę C^k-rozmaitości
- C^0-rozmaitość, to po prostu rozmaitość topologiczna
- C^∞-rozmaitość = rozmaitość gładka
- rozmaitość analityczna – gdy mapy są analitycznie zgodne (C^ω)
- rozmaitości zespolone, konforemne, kawałkami liniowe (PL), i inne.

Na C^k-rozmaitości nie da się zdefiniować funkcji klasy C^m dla $m > k$, tylko co najwyżej klasy C^k.

DYCHOTOMIA C^0 i $C^k, k>0$ — DYGRESJA

- Z każdego maksymalnego atlasu C^1 rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞-zgodnych. Zatem, każda C^1-rozmaitość posiada C^1 zgodną strukturę C^∞-rozmaitości. [Whitney ~ 1940]

- Istnieją C^0-rozmaitości (rozmaitości topologiczne) nie dopuszczające żadnej zgodnej struktury gładkiej. [Quinn '82, Friedman '82]

DEFINIOWANIE ROZMAITOŚCI GŁADKIEJ X ZA POMOCĄ SAMEGO ATLASU.

LEMAT. X - zbiór (bez topologii!), $\{U_\alpha\}$ - kolekcja podzbiorów w X, $\forall \alpha \ \varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ różnowartościowe (n - ustalone), t.że

(1) $\forall \alpha \ \varphi_\alpha(U_\alpha) = \tilde{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty

(2) $\forall \alpha, \beta \ \ \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ otwarte w $\mathbb{R}^n$

(3) gdy $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, to $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest gładkie (a nawet dyfeo, bo odwrotny $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$ też gładki)

(4) przeliczalnie wiele spośród U_α pokrywa X

(5) $\forall p, q \in X$, $p \neq q$, istnieją α, β oraz otwarte podzbiory $V_p \subset \tilde{U}_\alpha$, $V_q \subset \tilde{U}_\beta$ takie że $p \in \varphi_\alpha^{-1}(V_p)$, $q \in \varphi_\beta^{-1}(V_q)$ oraz $\varphi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \varphi_\beta^{-1}(V_q) = \emptyset$ (oddzielanie punktów otwartymi zbiorami mapowymi).

Wówczas na X istnieje (jedyna!) struktura rozmaitości topologicznej dla której zbiory U_α są otwarte. Ponadto mapy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tworzą wtedy gładki atlas na X.

SZKIC:

- Topologia. Jako bazę bierzemy przeciwobrazy przez φ_α otwartych podzbiorów w $\tilde{U}_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$. [ćw. Jest to baza]
- Lokalna euklidesowość jest wtedy oczywista.
- Nietrudno wybrać mniejszą bazę przeliczalną [dzięki (4), ćw.]
- Hausdorffowość to (5). $\square$

PRZYKŁAD. $\mathcal{L}$ - zbiór prostych na płaszczyźnie

[nie ma dogodnej topologii na tym zbiorze]

- U_h - proste niepionowe (horyzontalne)

  U_v - proste niepoziome (wertykalne)

- $U_h \ni L = \{y = ax+b\} \xmapsto{\varphi_h} (a,b) \in \mathbb{R}^2$

  $U_v \ni L = \{x = cy+d\} \xmapsto{\varphi_v} (c,d) \in \mathbb{R}^2$

  różnowartościowe, obrazy $= \mathbb{R}^2$ [warunek (1)]

- $U_h \cap U_v = \{$proste niepoziome i niepionowe$\} = \{\{y = ax+b\} : a \neq 0\}$

  $= \{\{x = cy+d\} : c \neq 0\}$

- $\varphi_h(U_h \cap U_v) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$

  $\varphi_v(U_h \cap U_v) = \{(c,d) \in \mathbb{R}^2 : c \neq 0\}$

  otwarte w $\mathbb{R}^2$ [warunek (2)]

- prosta $L = \{x = cy+d\} \in U_h \cap U_v$ jest po przekształceniu

  prostą $\{y = \frac{1}{c} \cdot x - \frac{d}{c}\}$ $\quad \left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right) \xleftarrow{\varphi_h} L \xrightarrow{\varphi_v} (c,d)$

- Zatem $\varphi_h \varphi_v^{-1}(c,d) = \left(\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}\right)$ gładkie!

  podobnie $\varphi_v \varphi_h^{-1}$ gładkie.

  [warunek (3)]

- $U_h \cup U_v = \mathcal{L}$ [warunek (4)]

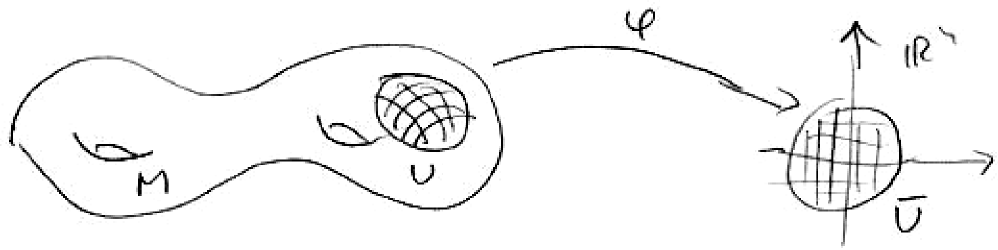
- warunek (5) też łatwy do sprawdzenia - pomijam.

UWAGA: Z tą ~~naturalną~~ (mimo wszystko!) topologią $\mathcal{L}$ jest w istocie homeomorficzne z wnętrzem wstęgi Möbiusa. Stąd do opisania $\mathcal{L}$ nie wystarcza jedna mapa!

JESZCZE KILKA UWAG:

(1) W dalszej części rozważań będziemy niekiedy utożsamiać mapowe otoczenie $U \subset M$ z obrazem przez mapę czyli z $\bar{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Można o tym myśleć, że przenosimy siatkę współrzędnych $(x_1, \dots, x_n)$ z $\bar{U}$ przez φ^{-1} na $U \subset M$



O punkcie p takim że $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_n)$ będziemy mówić że w mapie $p = (x_1, \dots x_n)$.

(2) Za pomocą translacji współrzędnych zawsze możemy przyjąć że $p = (0, \dots, 0)$ w mapie

czyli możemy założyć że (U, φ) jest mapą o początku w p.

(3) Często będziemy przechodzić do mniejszych zbiorów mapowych, za mapę biorąc odwzorowanie obcięte. (jest to mapa zgodna z atlasem!).

Będziemy wtedy mówić, że przyjmujemy że mapa (U, φ) wokół p ma zbiór mapowy U tak mały jak akurat potrzeba [zmniejszanie mapy].

(np. że jest rozłączny z pewnym zbiorem domkniętym $F \subset M$ nie zawierającym p).