ORIENTACJA W PRZESTRZENI WEKTOROWEJ V wymiaru n: (1)

- $\mathcal{B}(V)$ – zbiór wszystkich baz $b = (v_1, \dots, v_n)$ przestrzeni V

- Dla baz $b_1, b_2 \in \mathcal{B}(V)$, $b_1 = (v_1, \dots, v_n)$, $b_2 = (w_1, \dots, w_n)$ macierz przejścia $M_{b_1, b_2} = (a_{ij})_{n \times n}$ to taka macierz, że

$$w_k = \sum_i a_{ik} \cdot v_i$$

(równoważnie, jest to macierz przekształcenia $V \to V$, $v_i \to w_i$, wyrażona w bazie $b_1 = (v_1, \dots, v_n)$)

FAKT. $M_{b_1 b_2}$ jest macierzą nieosobliwą, tzn. $\det(M_{b_1 b_2}) \neq 0$.

- relacja $b_1 \sim b_2 \iff \det(M_{b_1, b_2}) > 0$

LEMAT
- Jest to relacja równoważności, ma dwie klasy abstrakcji

Dowód:

zwrotość – $M_{b, b} = I_{n \times n}$, $\det(I) = 1 > 0$.

symetryczność – $M_{b_2, b_1} = M_{b_1, b_2}^{-1}$

$$\det(M_{b_2 b_1}) = 1/\det(M_{b_1, b_2}).$$

przechodniość – $M_{b_1 b_3} = M_{b_1 b_2} \cdot M_{b_2 b_3}$

$$\det(M_{b_1 b_3}) = \det(M_{b_1 b_2}) \cdot \det(M_{b_2 b_3}).$$

Dwie klasy abstrakcji, bo:

każde dwie macierze b_1, b_2 t. że $b_1 \nsim b$, $b_2 \nsim b$ spełniają $b_1 \sim b_2$. □

- DEF. Orientacją na V nazywamy dowolną klasę abstrakcji relacji $\sim$ w zbiorze $\mathcal{B}(V)$.

• Następujące modyfikacje bazy $b = (v_1, \ldots, v_n)$ dają bazy z tej samej klasy abstrakcji (zachowują orientację):

* parzyste permutacje wektorów bazy
* mnożenie wektorów bazy przez dodatnie współczynniki
* zmiana jednego z wektorów v_k na $v_k' = v_k + \sum_{i \neq k} a_i v_i$ dla dowolnych $a_i \in \mathbb{R}$
* dowolne kombinacje powyższych
* dowolne ciągłe modyfikacje bazy (w przestrzeni baz)

• w $\mathbb{R}^3$ klasy orientacji rozpoznaje się za pomocą reguły śruby prawoskrętnej

• Następujące modyfikacje bazy $b = (v_1, \ldots, v_n)$ wyprowadzają poza klasę abstrakcji (zmieniają orientację):

* nieparzyste permutacje wektorów bazy, np. transpozycja dowolnych dwóch wektorów
* pomnożenie jednego z wektorów bazy przez ujemny współczynnik.

• w $\mathbb{R}^2$ klasy orientacji zadane są przez kierunek obrotu (o kąt $< \pi$) od pierwszego do drugiego wektora bazy, zgodny z lub przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

UWAGI: (1) Na rozmaitości M każda mapa (U,φ) zadaje, dla każdego $p\in U$, orientację w przestrzeni stycznej T_pM, wyznaczoną przez klasę bazy $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi_n}(p)\right)$.

(2) Dwie mapy (U,φ), (V,ψ) zadają tą samą orientację na przestrzeni T_pM, $p\in U\cap V$, dokładnie wtedy gdy jakobian odwzorowania przejścia

$$\left[\frac{\partial(\varphi\psi^{-1})_k}{\partial x_j}(\psi(p))\right]$$

ma dodatni wyznacznik (bo ten jakobian jest macierzą przejścia od bazy $\left(\frac{\partial}{\partial\psi_i}\right)_i$ do bazy $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\right)_i$).

DEFINICJA (1) Orientacją rozmaitości M nazywamy wybór atlasu $\mathcal{A}$ dla M, $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, takiego że każde dwie mapy $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ (U_β,φ_β) mają dodatni wyznacznik jakobianu odwzorowania przejścia w każdym punkcie $p\in U_\alpha\cap U_\beta$.
[wtedy w każdym punkcie $p\in M$ mamy jednoznacznie zadaną orientację na T_pM]

(2) Rozmaitość jest orientowalna jeśli posiada taki atlas; w przeciwnym razie jest nieorientowalna.

(3) Dwa atlasy A_1, A_2 j.w. zadają tą samą orientację, jeśli $\forall (U,\varphi)\in A_1$ $\forall (V,\psi)\in A_2$ jakobian odwzorowania przejścia ma dodatni wyznacznik $\forall p\in U\cap V$.

UWAGA: Jeśli rozmaitość M jest orientowalna i spójna, to ma na niej zadane dokładnie 2 różne orientacje. [to wymaga dowodu?] [ĆW-ZAD]

FAKT (bez dowodu)

Rozmaitość M jest nieorientowalna $\Longleftrightarrow$

istnieje ciągła drogę $b(t) : t \in [0,1]$ w przestrzeni

reperów $\mathcal{B}(M)$ taka, że $b(0), b(1) \in T_pM$

oraz $b_0 \not\sim b_1$ w T_pM.

PRZYKŁADY / UWAGI

- $\mathbb{R}^n$ jest rozmaitością orientowalną
- S^n też
- Produkt zachowuje orientowalność; stąd torusy $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ są orientowalne
- Iloraz orientowalnej rozmaitości przez (wolną i właściwie nieciągłą) grupę dyfeomorfizmów zachowujących orientację jest rozmaitością orientowalną; np. $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$
  z kolei, jeśli M jest spójna (orientowalna), zaś (wolna i właściwie) nieciągła grupa dyfeomorfizmów $G \curvearrowright M$ zawiera dyfeomorfizm zmieniający orientację, to iloraz M/G jest rozmaitością nieorientowalną; np. $\mathbb{R}P^{2k} = S^{2k}/\mathbb{Z}_2$; $Mö = S^1 \times I/\mathbb{Z}_2$
  [$\mathbb{R}P^{2k+1} = S^{2k+1}/\mathbb{Z}_2$ są orientowalne]

- [TRUDNIEJSZE]: [ale bez [illegible]]
  Jeśli M, N, P orientowalne (np. $P = \{x_0\}$), $P \subset N$
  $f: M \to N$, P składa się z samych wartości regularnych,
  to $f^{-1}(P)$ orientowalne.
  PRZYKŁAD. $SL(2,\mathbb{R}) = (\det)^{-1}(1)$ orientowalna

- Endomorfizm liniowy $F: V \to V$ zach. orientację gdy $\forall b \quad F(b) \sim b$.
  $(\Leftrightarrow \det(F) > 0)$
- Dyfeo $f: M \to M$ spójnej orientowalnej rozmaitości M zachowuje orientację gdy dla pewnej ($\Leftrightarrow$ dowolnej) orientacji na M (rozumianej jako zgodny wybór klas równoważności baz w przestrzeniach stycznych T_pM) różniczka f, df_q, w pewnym ($\Leftrightarrow$ dowolnym) punkcie $q \in M$ zachowuje orientację.

  - ĆW. Równoważnie, f zachowuje orientację M, gdy po wyrażeniu w mapach dowolnego atlasu $\mathcal{A}$ zadającego orientację na M, zachowuje orientację, tzn. spełnia warunek
  $$\det\left[D(\psi f \varphi^{-1})(\varphi(p))\right] > 0$$
  dla pewnego ($\Leftrightarrow$ dowolnego) $p \in M$.

ĆW. ciągła krzywa w zbiorze reperów bazowych w wiązce stycznej TM orientowalnej rozmaitości M nie wyprowadza poza klasę orientacji