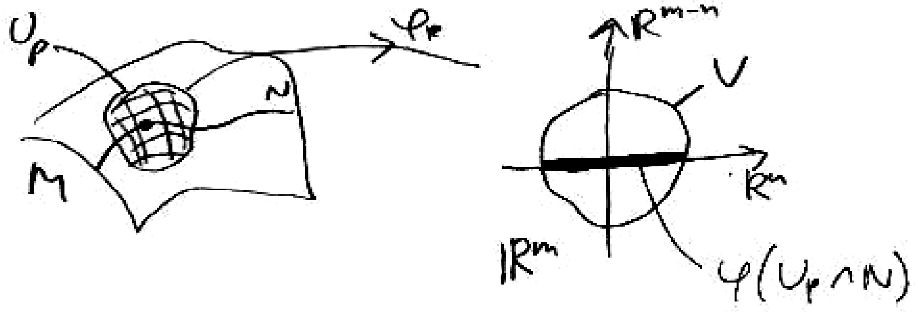
PODROZMAITOŚCI

Def. Podzbiór N gładkiej rozmaitości M^m jest podrozmaitością wymiaru n jeśli każdy punkt $p \in N$ posiada mapowe otoczenie otw. $U_p \subset M$ oraz mapę $\varphi : U_p \to V = \varphi(U_p) \subset \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\varphi_p(U_p \cap N) = \{(x_1, \ldots, x_m) \in V : x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\}$$



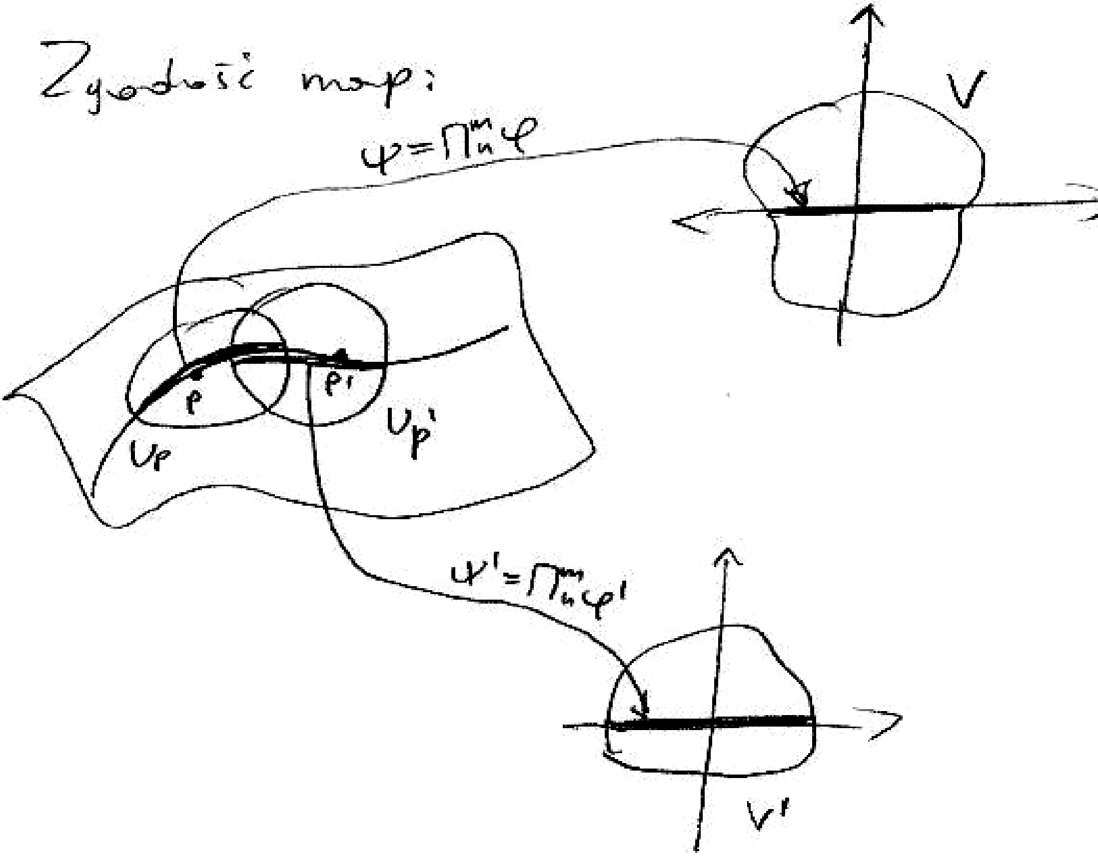
Inaczej: wokół każdego $p \in N$ istnieje lokalny układ współrzędnych $(x_1, \ldots, x_m)$ na otwartym otoczeniu $U_p \subset M$ taki, że $U_p \cap N$ wyraża się w tym układzie jako
$\{x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\}$

UWAGA: Każda n-wymiarowa podrozmaitość $N \subset M^m$ jest n-wymiarową gładką rozmaitością.

Dowód: Jako mapy bierzemy pary postaci $(U_p \cap N, \Pi^m_n \circ \varphi)$, gdzie (U_p, φ) są jak w definicji powyżej, i gdzie $\Pi^m_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ jest rzutowaniem
$$\Pi^m_n(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n).$$

(czyli że $\Pi^m_n \circ \varphi$ to pierwsze n współrzędnych odwzorowania φ).

Zgodność map:



$$\psi' \psi^{-1} = \Pi^m_n \underbrace{\varphi' \varphi^{-1}} i$$

gdzie $i : \psi(N \cap U_p) \to V$,

$$i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n \text{ zer}})$$

Jako złożenie 3 odwzorowań gładkich jest to gładkie. $\square$

PODROZMAITOŚCI ZADANE PRZEZ WŁOŻENIA

(odwzorowanie)

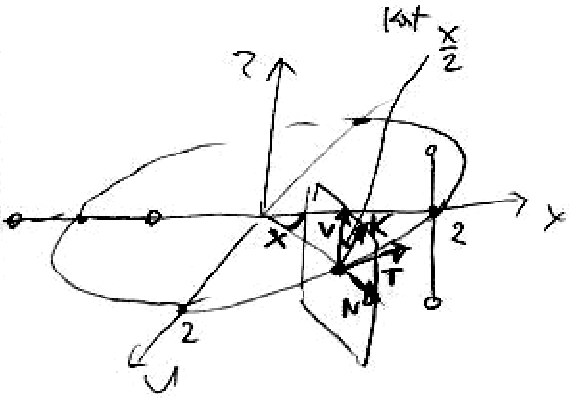
Def. Odwzorowanie $f: N \to M$ jest <u>immersją</u>, gdy rząd f w każdym punkcie jest równy wymiarowi $\dim N$, $\operatorname{rank}(f,x) = \dim N$ $\forall x \in N$.

UWAGA. Aby tak było, musi zachodzić $\dim N \leq \dim M$ oraz $\forall p \in N$ $df_p : T_pN \to T_{f(p)}M$ jest różnowartościowe.

Def. Immersję f nazywamy (gładkim) włożeniem, jeśli jest homeomorfizmem na obraz.

PRZYKŁAD – wstęga Möbiusa bez brzegu włożona w $\mathbb{R}^3$

$M\ddot{o} = \mathbb{R} \times (-1, 1)/\mathbb{Z}$ $\qquad k\cdot(x, y) = (x + k\cdot 2\pi, (-1)^k \cdot y)$



$N = (\cos x, \sin x, 0)$

$T = (-\sin x, \cos x, 0)$

$V = (0, 0, 1)$

$K = \sin\frac{x}{2} \cdot N + \cos\frac{x}{2}\cdot V$

$f: \mathbb{R}\times(-1,1) \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = 2\cdot N(x) + y\cdot K(x) =$$

$$= \left(2\cos x + y\cdot \sin\frac{x}{2},\ 2\sin x + y \sin\frac{x}{2},\ y\cdot\cos\frac{x}{2}\right)$$

f jest immersją pasa $\mathbb{R}\times(-1,1)$ w $\mathbb{R}^3$ [sprawdzenie – bezpośredni rachunek]

$f(k\cdot(x,y)) = f(x,y)$, więc indukuje immersję $\quad$ [$\operatorname{rank}(\bar f, \bar x) = \operatorname{rank}(f, x)$]

$\bar f: \mathbb{R}\times(-1,1)/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$

Można też nietrudno sprawdzić, że $\bar f$ jest homeo na obraz.

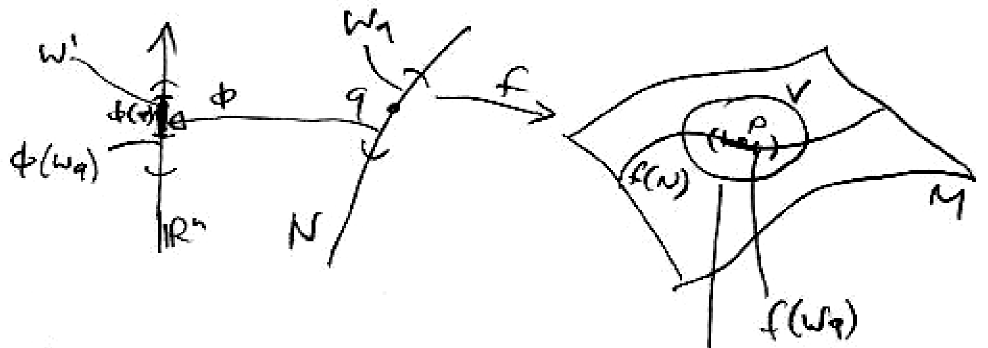
FAKT. Obraz $f(N)\subset M$ przez włożenie $f: N\to M$ jest podrozmaitością.

PATRZ $\boxed{4'}$ Tw. o rzędzie

Dowód:

Niech $p=f(q)\in f(N)$, i niech (V,ψ) będzie mapą wokół p na M.

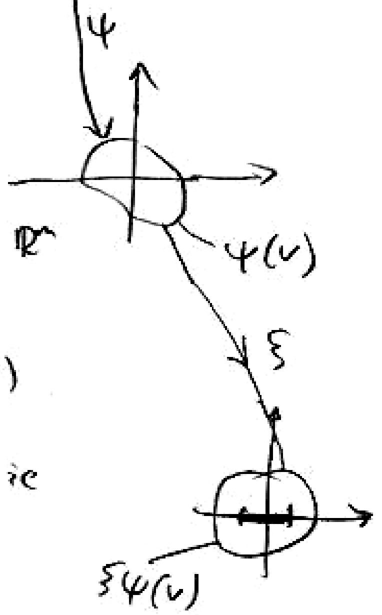
Niech (W_q,Φ) będzie mapą wokół q na N t.że $f(W_q)\subset V$



f wyrażona w mapach ϕ,ψ,

czyli $\psi f \phi^{-1}: \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{\phi(W_q)}} \to \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{\psi(V)}}$

ma rząd n w punkcie $\phi(q)$.



Z tw. o rzędzie

istnieje mniejsze otoczenie $W'\subset\Phi(W_q)$ punktu $\Phi(q)$

oraz dyfeomorfizm $\xi:\psi(V)\to V'\subset\mathbb{R}^m$ takie że

$$\xi\psi f\phi^{-1}|_{W'}(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$$

Ponieważ f jest homeo na obraz, istnieje otwarte $V_0\subset V$ t.że

$$f\phi^{-1}(W')= V_0\cap f(N).$$

Wtedy

$$\xi\psi(V_0\cap f(N))=$$
$$=\{(x_1,\dots,x_m)\in\xi\psi(V_0):$$
$$: x_{n+1}=\dots=x_m=0\}.\ \square$$

DYGRESJA: twierdzenie o zanurzeniu.

UWAGA. Każda podrozmaitość $N\subset M$ jest obrazem przez włożenie j.w., dla odwzorowania inkluzji $i: N\hookrightarrow M$ (będącego automatycznie włożeniem).

TWIERDZENIE O RZĘDZIE [przypadek 1°]

(I) W algebrze liniowej:

$F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ liniowe, $k \leq n$, $\operatorname{rank}(F) = k$

Niech $e_1, \dots, e_k$ standardowa baza w $\mathbb{R}^k$.
Wówczas istnieje baza $b_1, \dots, b_n$ w $\mathbb{R}^n$ taka że
$$F(e_i) = b_i \text{ dla } i = 1, \dots, k.$$
RÓWNOWAŻNIE:
$\exists$ liniowy automorfizm $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taki że
$$\psi \circ F(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

(II) W analizie: $k \leq n$

$f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ różniczkowalne, $f(0) = 0$, $\operatorname{rank}(f, 0) = k$
[czyli $\operatorname{rank} Df(0) = k$]
Wówczas istnieje dyfeomorfizm $\psi: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$
oraz otoczenie $U \subset \mathbb{R}^k$, $0 \in U$,
takie że $\psi \circ f|_U(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$.

PODROZMAITOŚCI ZADANE RÓWNANIAMI

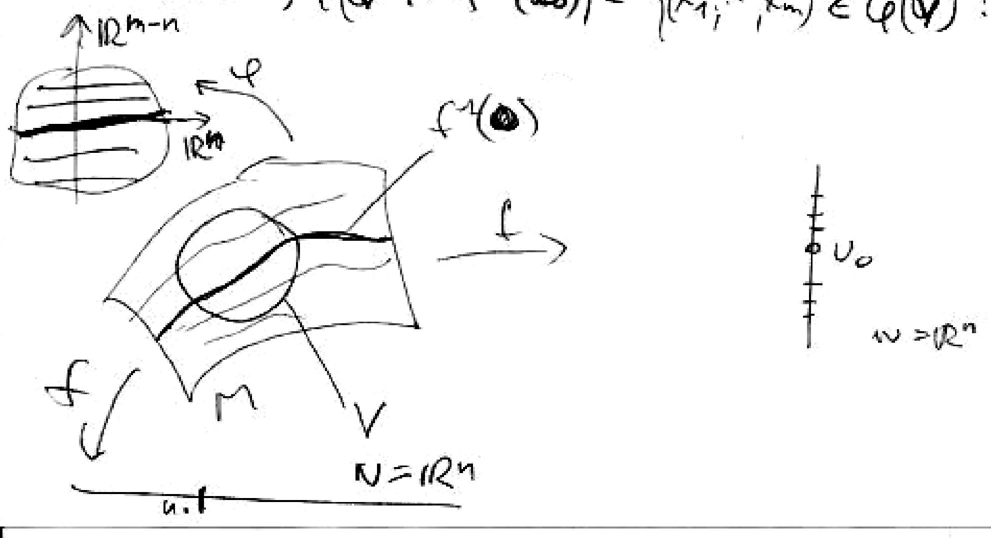
<u>Def.</u> Dla $f: M^m \to N^n$, $m \geq n$, $x \in M$ jest <u>punktem regularnym</u> f gdy $\operatorname{rank}(f,x) = n$; $y \in N$ jest <u>wartością regularną</u> gdy każdy $x \in f^{-1}(y)$ jest punktem regularnym.

FAKT. Jeśli $y_0 \in N$ jest wartością regularną $f: M^m \to N^n$, $m \geq n$, to zbiór $\{x \in M : f(x) = y_0\} = f^{-1}(y_0)$ jest podrozmaitością w M [zadaną równaniem $f(x) = y_0$] wymiaru $m-n$.

PATRZ $\boxed{5'}$ TW. O RZĘDZIE

<u>Dowód:</u>
Niech $p \in f^{-1}(y_0)$.

Zastępując N przez otoczenie mapowe U punktu y_0, które od razu utożsamiamy z podzbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$, oraz zastępując M przez $f^{-1}(U)$, możemy przyjąć że $N = \mathbb{R}^n$ zaś $y_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$.
Z tw o rzędzie, istnieje otoczenie V punktu p w M oraz mapa $\varphi: V \to \mathbb{R}^m$ że $f\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$
Wtedy $\varphi(V \cap f^{-1}(0)) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \varphi(V) : x_1 = \dots = x_n = 0\}$. $\square$



przypadek 2°

TW O RZĘDZIE

I. W ALGEBRZE LINIOWEJ

$F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ liniowe, $k \geq n$, $\operatorname{rank} F = n$

(„liniowa submersja")

Niech $e_1, \ldots, e_n$ standardowa baza w $\mathbb{R}^n$.

Wówczas istnieje baza $b_1, \ldots, b_k$ w $\mathbb{R}^k$ taka, że

$$F(b_i) = e_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$F(b_j) = 0 \quad j = n+1, \ldots, k$$

RÓWNOWAŻNIE:

$\exists$ liniowy automorfizm $\varphi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ taki, że

$$F\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_n)$$

UWAGA. Wówczas $\varphi(\ker F) = \ker(F\varphi^{-1})$
$= \{x : x_1 = \cdots = x_n = 0\} =$
$= \{(0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots, x_k)\}$

II. W ANALIZIE:

$k \geq n$, $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ różniczkowalna, $f(0) = 0$, $\operatorname{rank}(f, 0) = n$

(f jest submersją wokół $0 \in \mathbb{R}^k$)

Wówczas istnieje dyfeomorfizm $\varphi: (\mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}^k, 0)$

oraz otoczenie $U \subset \mathbb{R}^k$, $0 \in U$, takie że

$$f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_n).$$

UWAGA: Wówczas $\varphi\left[f^{-1}(0) \cap U\right] = \{x \in \varphi(U) : x_1 = \cdots = x_n = 0\}$.