# PEWNE UOGÓLNIENIE.

FAKT. Niech $f: M^m \to N^n$, $m > n$, i niech $P \subset N$ będzie podrozmaitością złożoną z samych wartości regularnych $f$. Wówczas $f^{-1}(P)$ jest podrozmaitością w $M$ wymiaru $m-n+p$.

Dowód:

Przedstawiając lokalnie $P \subset N$ jako $\left\{ \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_n): \\ x_{p+1} = \dots = x_n = 0 \end{array} \right\}$

oraz rozważając rzut $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{p+1}, \dots, x_n)$

otrzymujemy że lokalnie $f^{-1}(P) = (\pi \circ f)^{-1}(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-p})$

przy czym

$(0,0,\dots,0)$ jest wartością regularną $\pi \circ f$ (tzn $\forall x \in f^{-1}(P)$ $\operatorname{rank}(\pi \circ f, x) = n-p$ bo $D_x \pi \circ f = D_{f(x)}\pi \circ D_x f$)

Dalej stosując lokalnie poprzedni fakt

otrzymujemy, że

$U \cap f^{-1}(P)$ jest podrozmaitością w $U$

dla lokalnych otoczeń mapowych $U \subset M$ pokrywających $f^{-1}(P)$.

To wystarcza, by twierdzić że $f^{-1}(P)$ jest podrozmaitością w $M$. $\square$

PRZYKŁAD. $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^4$.

$\det : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\det(x, y, z, t) = xt - yz$, to gładka funkcja.

FAKT. Dowolna niezerowa macierz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ jest punktem regularnym det.

D-d: $$D\det \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \left( \frac{d(\det)}{dx}, \frac{d(\det)}{dy}, \frac{d(\det)}{dz}, \frac{d(\det)}{dt} \right) =$$

$$= \underbrace{(t, -z, -y, x)}_{\text{macierz } 4\times 1} \neq (0, \dots, 0)$$

Stąd rank $\left[ D\det \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right] = 1$, czyli rank $\left(\det, \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = 1$. $\square$

WNIOSEK

- Dowolna liczba $a \neq 0$ jest wartością regularną det.

D-d. jeśli $\det \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a \neq 0$, to $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 1 \right\}$ – grupa

Z powyższych rozważań wynika, że $SL(2, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ jest 3-wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^4$. W szczególności jest rozmaitością!

Ponadto, można pokazać że operacje grupowe mnożenia $[SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R}), (g, h) \mapsto (g \cdot h)]$ oraz odwracania $[SL(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R}), g \mapsto g^{-1}]$ są gładkie.

UWAGA. Rozmaite inne grupy macierzowe są rozmaitościami z gładkimi działaniami grupowymi, czyli tzw. grupami Liego.

# WŁASNOŚCI PODROZMAITOŚCI

(0) włożenie przez inkluzję $i: N \hookrightarrow M$ jest gładkie

(1) obcięcie gładkiej $f: M \to N$ do podrozmaitości $P \subset M$ jest gładkie

(bo $f|_P = f \circ i$)

(3) podrozmaitość w podrozmaitości jest podrozmaitością (złożenie włożeń jest włożeniem)

(3) Jeśli $P_1 \subset M_1, P_2 \subset M_2$ są podrozmaitościami, to $P_1 \times P_2 \subset M_1 \times M_2$ jest podrozmaitością.

jako podrozmaitość

• każde pole wektorowe $X \in C^\infty(TM)$ jest włożeniem $M \xrightarrow{X} TM$.

# PRZESTRZEŃ STYCZNA (W PUNKCIE) DO PODROZMAITOŚCI.

$N \subset M$ podrozmaitość, $p \in N$

- $C_pN \subset C_pM$, a ponadto (dla $\gamma_1, \gamma_2 \in C_pN$ zachodzi) $\gamma_1 \overset{N}{\sim} \gamma_2 \iff \gamma_1 \overset{M}{\sim} \gamma_2$ [ćw]
- stąd wynika, że $T_pN = C_pN/\sim$ w naturalny sposób włącza się (różnowartościowo) w $T_pM = C_pM/\sim$
- Zachodzi nawet więcej

FAKT. $T_pN$ jest podprzestrzenią wektorową w $T_pM$.

Dowód: powyższe naturalne włożenie $T_pN$ jako podzbioru w $T_pM$ jest identyczne z różniczką inkluzji $di_p : T_pN \to T_pM$, $i : N \to M$ [inkluzja jest gładka]. □

# WIĄZKA STYCZNA PODROZMAITOŚCI.

FAKT. Jeśli $N \subset M$ jest gładką podrozmaitością, to wiązka styczna $TN$ jest gładką podrozmaitością w $TM$.

Dowód (szkic): Lokalnie $N$ w $M$ wygląda jak $\mathbb{R}^n \times 0$ w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, a stąd wynika, że lokalnie $TN$ w $TM$ wygląda jak $(\mathbb{R}^n \times 0) \times (\mathbb{R}^n \times 0)$ w $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n})$.

Po odpowiednim spermutowaniu współrzędnych mamy tezę. □

UWAGA. Jeśli $(U,\varphi)$ jest taką mapą na rozmaitości $M$, że dla podrozmaitości $N \subset M$ zachodzi

$$\varphi(U \cap N) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U) : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$$

i jeśli $p \in U \cap N$, to $T_pN$ jako podprzestrzeń w $T_pM$ jest rozpięta przez wektory $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(p)$.

Rzeczywiście, jeśli $V \in T_pN$ to $V = [\gamma, t_0]$

gdzie $\gamma : (a,b) \to N$, $\gamma(t_0) = p$

Wtedy w mapie $(U,\varphi)$ krzywa $\varphi \circ \gamma$ ma zerujące się współrzędne powyżej $n$, zatem $(\varphi\circ\gamma)'(t_0) = ((\varphi\circ\gamma)_1'(t_0), \dots, (\varphi\circ\gamma)_n'(t_0), 0, \dots, 0)$

To oznacza, że $V = \sum_{i=1}^{n} (\varphi\circ\gamma)_i'(t_0) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)$.

PEŁNIEJSZY DOWÓD FAKTU, ŻE
jeśli $N \subset M$ jest podrozmaitością, to $TN \subset TM$ także jest podrozmaitością

Niech $(U, \varphi)$ będzie mapą (na $M$) taką, że

$$\varphi(U \cap N) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U) : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}.$$

Rozważmy stowarzyszoną mapę $(TU, \tilde{\varphi})$ na $TM$
i zbadajmy zbiór $\tilde{\varphi}(TU \cap TN)$.

Ponieważ dla $X \in TM$, $X = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)$, zachodzi

$$\tilde{\varphi}(X) = (\varphi(p), a_1, \dots, a_m),$$

widać że

$$\tilde{\varphi}(TU \cap TN) = \{(x_1, \dots, x_m, a_1, \dots, a_m) \in \tilde{\varphi}(TU) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n :$$
$$: x_{n+1} = \dots = x_m = 0 \text{ oraz } a_{n+1} = \dots = a_m = 0\}.$$

Po odpowiednim spermutowaniu współrzędnych
$(x_1, \dots, x_m, a_1, \dots, a_m)$ widać, że mapy postaci $\tilde{\varphi}$ j.w.
zaświadczają, że $TN$ jest podrozmaitością w $TN$.

UWAGA.

Niech $i_N : N \hookrightarrow M$ będzie odwzorowaniem włożenia podrozmaitości $N \subset M$. Wówczas odwzorowanie włożenia $i_{TN} : TN \hookrightarrow TM$ jest tożsame z odwzorowaniem stycznym $di_N : TN \to TM$.

<u>Uzasadnienie</u>: w obydwu przypadkach odwzorowań $i_{TN}$ oraz $di_N$, wektor $v \in TN$ reprezentowany krzywą $(\gamma, t_0)$ przechodzi na wektor z $TM$ reprezentowany krzywą $(i_N \circ \gamma, t_0)$. $\square$