- Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$ to dwuliniowe odwzorowanie $\langle\, , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takie że

$$(1)\quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$$

$$(2)\quad \forall_{\substack{v\in\mathbb{R}^n \\ v\neq 0}} \quad \langle v, v\rangle > 0 .$$

- Każdy iloczyn w $\mathbb{R}^n$ zadany jest symetryczną macierzą dodatnio określoną (g_{ij}) poprzez $\langle v, w\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v_i w_j$.

- Niech $\langle\, , \rangle_p$ będzie iloczynem skalarnym na T_pM i niech $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ będzie mapą wokół p.

<u>Bazą kanoniczną</u> T_pM w mapie φ nazywamy układ wektorów

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p) := (d\varphi_p)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi(p)), \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Mówimy że $\langle\, , \rangle_p$ wyraża się w mapie φ macierzą symetryczną dod. okr. (g_{ij}) jeśli

$$\left\langle \sum a_i \frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p), \sum b_j \frac{\partial}{\partial\varphi_j}(p)\right\rangle_p = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} g_{ij} a_i b_j$$

$\left(\text{inaczej, } g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p), \frac{\partial}{\partial\varphi_j}(p)\right\rangle_p\right)$.

LEMAT. Jeśli w mapie φ wokół p iloczyn skalarny $\langle\, , \rangle_p$ wyraża się macierzą (g_{ij}), to w innej mapie ψ wokół p $\langle\, , \rangle_p$ wyraża się macierzą $(g'_{ij}) = P^T \cdot (g_{ij}) \cdot P$ gdzie $P = \left(\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})_i}{\partial x_j}(\psi(p))\right)$ jest macierzą przejścia od bazy $\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p)\right\}$ do bazy $\left\{\frac{\partial}{\partial\psi_i}(p)\right\}$ w T_pM.

$$\boxed{\begin{array}{l} h\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ dh_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \\ = \sum D_i h_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \end{array}}$$

<u>dowód</u>: Wyraźmy wektory $\frac{\partial}{\partial\psi_i}(p)$ w bazie $\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p)\right\}$

$$\frac{\partial}{\partial\psi_i}(p) = (d\psi_p)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = (d\varphi_p)^{-1}(d\varphi_p)(d\psi_p)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = (d\varphi_p)^{-1}\, d(\varphi\circ\psi^{-1})_{\psi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) =$$

$$= (d\varphi_p)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})_k}{\partial x_i}\Big|_{\psi(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})_k}{\partial x_i}\Big|_{\psi(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi_k}(p)$$

a więc P jest macierzą przejścia.

Dowód równości $(g'_{ij}) = P^T \cdot (g_{ij}) \cdot P$ wynika ze znanego z algebry liniowej faktu dotyczącego postaci macierzy formy kwadratowej w nowej bazie.

Niezależnie policzmy:

$$g'_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \psi_i}(p), \frac{\partial}{\partial \psi_j}(p) \right\rangle = \left\langle \sum_k \frac{\partial (\varphi \circ \psi^{-1})_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_k}, \sum_m \frac{\partial (\varphi \circ \psi^{-1})_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \right\rangle$$

$$= \sum_{k,m} \frac{\partial (\varphi\psi^{-1})_k}{\partial x_i} \frac{\partial (\varphi\psi^{-1})_m}{\partial x_j} g_{km} = \sum_{k,m} \frac{\partial (\varphi\psi^{-1})_k}{\partial x_i} g_{km} \frac{\partial (\varphi\psi^{-1})_m}{\partial x_j}$$

Czyli $(g'_{ij}) = \left(\frac{\partial (\varphi\psi^{-1})_k}{\partial x_i} \right)^T \cdot (g_{km}) \cdot \left(\frac{\partial (\varphi\psi^{-1})_m}{\partial x_j} \right) = P^T \cdot (g_{km}) \cdot P$. □

DEF. Metryką Riemanna g na rozmaitości gładkiej M nazywamy rodzinę iloczynów skalarnych $\langle , \rangle_p$ na przestrzeniach T_pM, po jednym dla każdego $p \in M$, gładko zależącą od p w następującym sensie: W dowolnej mapie $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ współczynniki $g_{ij}(p)$ macierzy iloczynu $\langle , \rangle_p$ zależą gładko od p.

UWAGA. Na przecięciu dwóch map, jeśli w jednej z nich współczynniki (g_{ij}) są gładkie, to w drugiej współczynniki $(g'_{ij}) = D(\varphi \circ \psi^{-1})^T_{|\psi(p)} \cdot (g_{ij})\, D(\varphi \circ \psi^{-1})_{|\psi(p)}$ też zależą gładko od p, więc powyższe określenie gładkiej zależności ma sens.

UWAGA. Na C^k-rozmaitości ma sens pojęcie metryki Riemanna klasy C^{k-1} (bo wtedy $\frac{\partial (\varphi\psi^{-1})_i}{\partial x_j}$ są klasy C^{k-1}).

TW. Na każdej gładkiej rozmaitości M istnieje metryka Riemanna. $\boxed{3}$

d-d: Rozważmy rozkład jedności $\{f_j\}$ wpisany w pokrycie $\{U_i\}$ zbiorami mapowymi w ten sposób, że $\mathrm{supp}\{f_j\} \subset U_{i_j}$.

Dla każdego U_i rozważmy metrykę Riemanna g_i na U_i (dowolną, np zadaną w mapie $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ macierzą o stałych współczynnikach, np $I_{n\times n}$).

Iloczyn skalarny w T_pM, dla $p \in U_i$, w metryce Riemanna g_i oznaczać będziemy przez $g_i(X,Y)$ dla $X, Y \in T_pM$.

Połóżmy $g = \sum f_j\, g_{i_j}$. W każdym punkcie $p \in M$ ma to sens, dzięki lokalnej skończoności nośników $\mathrm{supp}\, f_j$. W każdym punkcie mamy iloczyn skalarny, bo suma iloczynów skalarnych jest iloczynem skalarnym. $\square$

Def. Dla $X \in T_pM$ <u>długość X</u> w metryce Riemanna g to $\|X\|_g = \sqrt{g_p(X,X)} = \sqrt{g(X,X)}$.

Dla krzywej różniczkowalnej $\gamma : [a,b] \to M$, <u>długość</u> γ w metryce g to

$$L^g(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g \, dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt .$$

Dla $p, q \in M$ określmy $\mathrm{dist}_g(p,q) := \inf\left\{ L^g(\gamma) : \begin{array}{l} \gamma : [a,b] \to M,\ \gamma(a) = p,\ \gamma(b) = q \\ \gamma\text{ - kawałkami różniczkowalna} \end{array} \right\}$

UWAGI. Gdy p, q w tej samej komponencie spójności M, to istnieją kawałkami różniczkowalne krzywe od p do q. Wtedy $\mathrm{dist}_g(p,q) < \infty$.
Gdy p, q w różnych komponentach, takich krzywych nie ma. Możemy wtedy przyjąć konwencję, że $\mathrm{dist}_g(p,q) = \infty$.

LEMAT. (1) $\mathrm{dist}_g(p,q) \geq 0$; (2) $\mathrm{dist}_g(p,q) \leq \mathrm{dist}_g(p,s) + \mathrm{dist}_g(s,q)$.

Trywialne.

TWIERDZENIE.

(1) $dist_g(p,q) > 0$ dla $p \neq q$, a więc $dist_g$ jest metryką

(2) $dist_g$ jest metryką zgodną z wyjściową topologią na M (zatem M metryzowalne).

dowód (1): Rozważmy otoczenie U punktu p w mapie φ. Utożsamiamy U z $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, p z $(0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$.

Niech $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon\}$ i weźmy ε tak małe, że $B_\varepsilon \subset U$ oraz $q \notin B_\varepsilon$.

Wówczas każda krzywa łącząca p z q zawiera pewien segment zawarty w B_ε łączący p z pewnym punktem $s \in \partial B_\varepsilon$.

Wystarczy pokazać że $\exists C > 0 : L^g(\gamma) > C$ dla dowolnej krzywej γ w B_ε łączącej $p = 0$ z pewnym $s \in \partial B_\varepsilon$.

$$L^g(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g \, dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \frac{\|\gamma'(t)\|_g}{\|\gamma'(t)\|_{\mathbb{R}^n}} \, dt$$

Rozważmy
$$A_1 = \min\left\{ \|X\|_{g(p)} : \begin{matrix} X \in T_pM \\ \|X\|_{\mathbb{R}^n} = 1 \end{matrix}, \ p \in B_\varepsilon \right\}$$

$$A_2 = \max\{ \text{—} \quad '' \quad \text{——} \}$$

Ze zwartości S^{n-1} oraz B_ε mamy $0 < A_1 \leq A_2 < \infty$.

Mamy wtedy $A_1 \leq \frac{\|X\|_{g(p)}}{\|X\|_{\mathbb{R}^n}} \leq A_2 \quad \forall p \in B_\varepsilon \ \forall X \in T_pM = \mathbb{R}^n$

Zatem $L^g(\gamma) \geq A_1 \cdot \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \, dt \geq A_1 \cdot \varepsilon$ więc $C = A_1 \cdot \varepsilon$ jest OK.

dowód (2): z poprzedniego wynika że $dist_g(p,s) \geq A_1 \, dist_{\mathbb{R}^n}(p,s)$

Z kolei, jeśli γ jest odcinkiem łączącym p z s, to

$$L^g(\gamma) \leq A_2 \cdot \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \, dt = A_2 \cdot \varepsilon$$

Zatem $dist_g(p,s) \leq A_2 \cdot dist_{\mathbb{R}^n}(p,s)$. Stąd zgodność $dist_g$ z $dist_{\mathbb{R}^n}$ dla punktów bliskich, a więc zgodność $dist_g$ z topologią na U, i na $\mathbb{R}^n$. □

$$\nabla_g f(p) = Y \Leftrightarrow \forall X \in T_pX \quad df_p(X) = \langle X, Y \rangle.$$

Jakie zyski z metryki Riemanna nad zwykłą metryką:

(1) długości wektorów stycznych!

(2) gradient funkcji

(3) naturalna miara obszarów zawartych w M

(4) możliwość uprawiania analizy wektorowej na M również jak na $\mathbb{R}^n$.

lokalne wyliczenie
gładkość

$$[\nabla_g f(p)]_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_i} = (g_{ij}(p))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

(5) pole powierzchni zanurzonych i wyżej wymiarowych podrozmaitości

(6) geometria różniczkowa
krzywizna, koneksja, przeniesienie równoległe.