PRZESTRZEŃ STYCZNA – definicja kinematyczna

<u>Oznaczenie z analizy:</u>

(1) dla gładkiej funkcji $f:(a,b)\to\mathbb{R}^n$, $f=(f_1,\dots,f_n)$, $t\in(a,b)$

pochodną nazywamy wektor $f'(t)=\frac{\partial f}{\partial t}(t)=\begin{pmatrix} f_1'(t)\\ f_2'(t)\\ \vdots\\ f_n'(t)\end{pmatrix}$

(2) Dla gładkiego odwzorowania $f:U\to\mathbb{R}^m$, $U\subset\mathbb{R}^n$ otwarty, $p\in U$, oznaczamy

D_pf – macierz tych pochodnych cząstkowych. Dokładniej, jeśli $f=(f_1,\dots,f_m)$,

$f_i: U\to\mathbb{R}$ gładkie funkcje

$$D_pf=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p)\\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p)\end{pmatrix}$$

Tym samym symbolem oznaczamy też odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ zadane tą macierzą (różniczka f w p)

<u>Styczność krzywych gładkich na rozmaitościach</u>

M gładka rozmaitość

<u>Krzywa gładka</u> na M to gładkie odwzorowanie $c:(a,b)\to M$

C_pM – zbiór par (c,t_0) t.że. – krzywe <u>zbazowane w p</u>

$c:(a,b)\to M$ gładka krzywa, $t_0\in(a,b)$, $c(t_0)=p$

Def. Niech $\varphi:U\to\mathbb{R}^n$ mapa wokół p. Krzywe (c_1,t_1) (c_2,t_2) zbazowane w p

są do siebie <u>styczne</u> w mapie (U,φ) jeśli $(\varphi\circ c_1)'(t_1)=(\varphi\circ c_2)'(t_2)$

Krzywe c_1 i c_2 wyrażone w mapie φ

LEMAT. Jeśli $(c_1,t_1)(c_2,t_2) \in C_pM$ są styczne w mapie (U,φ) wokół p, to są też styczne w dowolnej innej mapie (W,ψ) wokół p. (zgodnej z (U,φ)).

dowód: $$(\psi\circ c_1)'(t_1) = [(\psi\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ c_1)]'(t_1) = D_{\varphi(p)}(\psi\circ\varphi^{-1})[(\varphi\circ c_1)'(t_1)] =$$
$$= D_{\varphi(p)}(\psi\circ\varphi^{-1})[(\varphi\circ c_2)'(t_2)] = (\psi\circ c_2)'(t_2). \quad \square$$

Def. Krzywe $(c_1,t_1)(c_2,t_2) \in C_pM$ są styczne, jeśli są styczne w pewnej (równoważnie w każdej) mapie wokół p.

UWAGA: styczność elementów z C_pM jest relacją równoważności.

Def. Przestrzenią styczną do M w p nazywamy zbiór klas abstrakcji

$$T_pM := C_pM/\text{styczność}$$

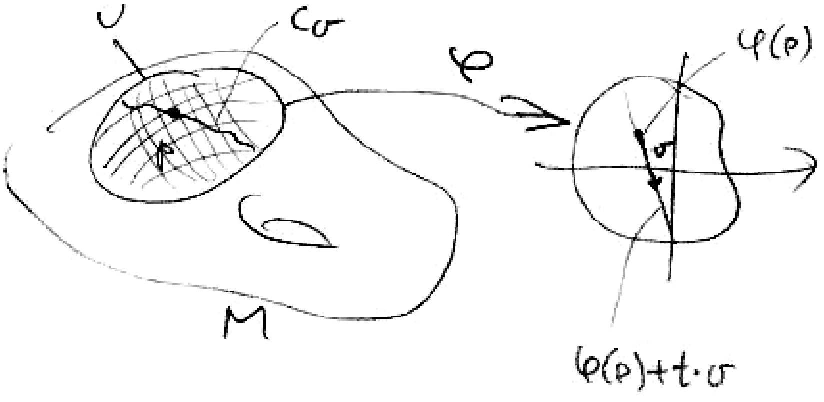
Klasę abstrakcji krzywej $(c,t_0)\in C_pM$ oznaczamy przez $[c,t_0]$ lub $c'(t_0)$.

Struktura wektorowa przestrzeni T_pM

Dla mapy (U,φ), $\varphi: U\to\mathbb{R}^n$ wokół $p\in M$ określamy dwa odwzorowania:

- $\varphi_p^*: T_pM\to\mathbb{R}^n$, $\varphi_p^*([c,t_0]) = (\varphi\circ c)'(t_0)\in\mathbb{R}^n$ [dobrze określone! z def. T_pM]
- $\lambda_{\varphi,p}:\mathbb{R}^n\to T_pM$, $\lambda_{\varphi,p}(v) = [c_v, 0]$

gdzie $c_v(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p)+t\cdot v)$



LEMAT. $\varphi_p^* \circ \lambda_{\varphi,p} = id_{\mathbb{R}^n}$ oraz $\lambda_{\varphi,p} \circ \varphi_p^* = id_{T_pM}$

a zatem φ_p^* oraz $\lambda_{\varphi,p}$ są wzajemnie jednoznaczne i do siebie odwrotne.

Dowód: • Niech $v \in \mathbb{R}^n$.

$$\varphi_p^* \circ \lambda_{\varphi,p}(v) = \varphi_p^*([c_v, 0]) = (\varphi \circ c_v)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(p) + t \cdot v)) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi(p) + t \cdot v) = v. \text{ OK}$$

• Niech $[c, t_0] \in T_pM$.

$$\lambda_{\varphi,p} \circ \varphi_p^*([c, t_0]) = \lambda_{\varphi,p}[(\varphi \circ c)'(t_0)] = [c_{(\varphi \circ c)'(t_0)}, 0]$$

Sprawdźmy, że (c, t_0) oraz $(c_{(\varphi\circ c)'(t_0)}, 0)$ są styczne w mapie φ.

$$c_{(\varphi\circ c)'(t_0)}(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t \cdot (\varphi \circ c)'(t_0))$$

Zatem w mapie φ mamy

$$(\varphi \circ c_{(\varphi\circ c)'(t_0)})'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} [\varphi(p) + t \cdot (\varphi\circ c)'(t_0)] = (\varphi \circ c)'(t_0)$$

a więc są styczne!

A więc $[c, t_0] = [c_{(\varphi\circ c)'(t_0)}, 0]$, czyli $\lambda_{\varphi,p} \circ \varphi_p^*([c, t_0]) = [c, t_0]$. $\square$

FAKT. Na przestrzeni stycznej T_pM istnieje dokładnie jedna struktura przestrzeni wektorowej, dla której odwzorowania φ_p^* (oraz $\lambda_{\varphi,p}$) dla wszystkich map φ wokół p, są liniowymi izomorfizmami.

Struktura ta jest zadana przez operacje dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary, następująco:

dla $X, Y \in T_pM$

$$X + Y := \lambda_{\varphi,p}(\varphi_p^*(X) \underset{\text{suma w } \mathbb{R}^n}{+} \varphi_p^*(Y))$$

dodatkowo, dla $a \in \mathbb{R}$

$$a \cdot X := \lambda_{\varphi,p}(a \underset{\text{mnożenie przez skalar w } \mathbb{R}^n}{\cdot} \varphi_p^*(X))$$

czyli zadane przez: $X,Y\in T_pM \rightsquigarrow X+Y=\lambda_{\varphi,p}(\varphi_p^*(X)+\varphi_p^*(Y))$;
$X\in T_pM, a\in\mathbb{R}$ (skalar) $\rightsquigarrow a\cdot X=\lambda_{\varphi,p}(a\cdot\varphi_p^*(X))$

Dowód FAKTU: Struktura taka musi być przeniesiona z $\mathbb{R}^n$ przez bijekcję $\lambda_{\varphi,p}$. Wystarczy uzasadnić, że dla różnych map φ,ψ wokół p przeniesione z $\mathbb{R}^n$ ~~struktury~~ na T_pM struktury liniowe pokrywają się, czyli że odwzorowanie złożone

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[\lambda_{\varphi,p}]{} T_pM \xrightarrow[\psi_p^* = \lambda_{\psi,p}^{-1}]{} \mathbb{R}^n \text{ jest liniowe.}$$

Sprawdzamy:

$$\underline{\psi_p^*\circ\lambda_{\varphi,p}(v)}=\psi_p^*([c_v,0])=(\psi\circ c_v)'(0)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi\circ\varphi^{-1}(\varphi(p)+t\cdot v)=$$

$$=D_{\varphi(p)}(\psi\circ\varphi^{-1})\left[\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi(p)+t\cdot v)\right]=\underline{D_{\varphi(p)}(\psi\circ\varphi^{-1})(v)}$$

to się jeszcze przyda

a więc $\overset{\text{przekształcenie } \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}{\psi_p^*\circ\lambda_{\varphi,p}}$ pokrywa się z $\overset{\text{działaniem macierzą}}{D_{\varphi(p)}(\psi\circ\varphi^{-1})}$, więc jest liniowe! $\square$

UWAGA: O odwzorowaniu $\varphi_p^*: T_pM\to\mathbb{R}^n$ można myśleć jak o „mapie" dla T_pM stowarzyszonej z mapą φ otoczenia punktu p. W tej mapie działania na wektorach z T_pM sprowadzają się do zwykłych działań na wektorach w $\mathbb{R}^n$.

Terminologia: elementy przestrzeni T_pM nazywamy wektorami stycznymi do M w punkcie p.

PRZYKŁAD: $M=\mathbb{R}^n$. Mamy wyróżnioną mapę $\varphi: M=\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\varphi=id_{\mathbb{R}^n}$. Dla każdego $p\in M=\mathbb{R}^n$ ta mapa, poprzez $\varphi_p^*=(id_{\mathbb{R}^n})_p^*$ kanonicznie utożsamia $T_p\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}^n$.

To samo dla $M=U\subset\mathbb{R}^n$ otwartych, $p\in U$, gdzie inkluzja $i: U\to\mathbb{R}^n$ jest wyróżnioną mapą.

VERTE

UWAGA o rozmaitościach M z brzegiem. Dla $p\in\partial M$ dopuszczamy dodatkowo krzywe gładkie $c:[t_0,b)\to M$ oraz $c:(a,t_0]\to M$ (takie że $c(t_0)=p$) oraz pary (c,t_0) jako elementy C_pM [inaczej w punktach z ∂M dla niektórych „kierunków" wektorów nie istniałyby odpowiednie krzywe reprezentujące te wektory]. Styczność oraz T_pM określa się potem w analogiczny sposób.

OZNACZENIA. (1) Wektory styczne do $M = \mathbb{R}^n$ (lub $M = U \subset \mathbb{R}^n$) w punkcie p, odpowiadające wektorom bazy $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$ … $e_n = (0,\dots,0,1)$ z $\mathbb{R}^n$ oznaczamy przez $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$.

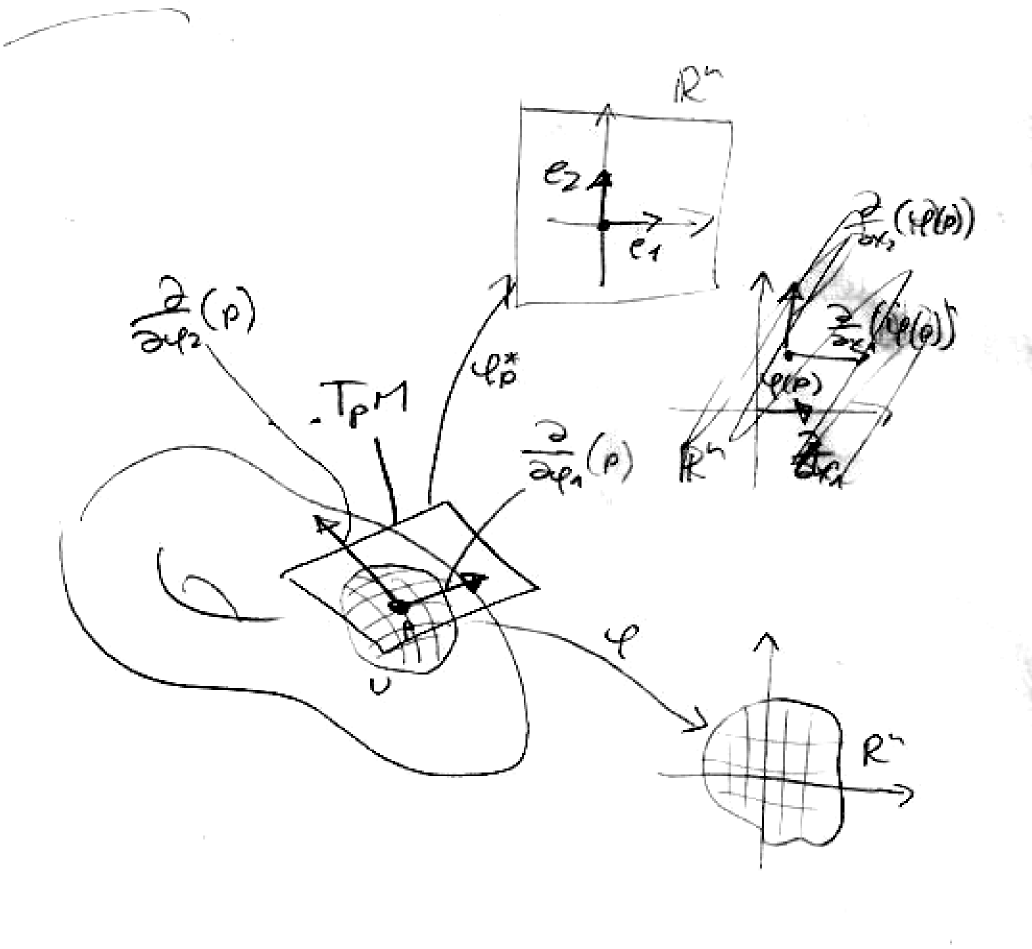
[Sens wprowadzenia takiego oznaczenia stanie się jasny później, gdy wektory utożsamimy z tzw. derywacjami.]

Tworzą one bazę T_pU, zaś dowolny wektor z T_pU ma postać $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$.

(2) Nieco przez analogię dla danej rozmaitości M, $p \in M$, mapy φ wokół p przeciwobrazy przez $\varphi_p^*: T_pM \to \mathbb{R}^n$ wektorów $e_1, \dots, e_n$ oznaczamy

$$(\varphi_p^*)^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p).$$

Tworzą one bazę T_pM, zaś dowolny wektor z T_pM ma postać $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)$.



RÓŻNICZKA

$f: M \to N$ gładkie, $p \in M$, $f(p) = q \in N$, $\dim M = m$, $\dim N = n$.

Dla krzywej zbazowanej $(c, t_0) \in C_p M$ mamy $(f \circ c, t_0) \in C_q N$

LEMAT. Jeśli $(c_1, t_1), (c_2, t_2) \in C_p M$ są styczne, to $(f \circ c_1, t_1), (f \circ c_2, t_2) \in C_q N$ też są styczne.

<u>Dowód</u>: Niech φ będzie mapą wokół p, $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$, zaś ψ mapą wokół q, $\psi: W \to \mathbb{R}^n$. Sprawdzamy z definicji styczność krzywych $(f \circ c_i, t_i)$:

$$(\psi \circ f \circ c_i)'(t_i) = [(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_i)]'(t_i) = D_{\varphi(p)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})\underbrace{[(\varphi \circ c_i)'(t_i)]}_{\text{jednakowe dla } i = 1,2}$$

$\left(\psi f \varphi^{-1} \text{ pomiędzy otwartymi podzb. w } \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \text{ to } f \text{ wyrażone w mapach } \varphi, \psi \right)$

Zatem $(f \circ c_1, t_1)$ i $(f \circ c_2, t_2)$ styczne. □

<u>Definicja</u>

Różniczką f w punkcie p nazywamy odwzorowanie $df_p: T_p M \to T_q N$ określone przez $df_p([c, t_0]) = [f \circ c, t_0]$. (Dobrze określone na mocy poprzedniego lematu)

LEMAT. $df_p: T_p M \to T_q N$ jest odwzorowaniem liniowym.

<u>Dowód</u>: Wystarczy sprawdzić, że złożenie

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow[\lambda_{\varphi,p} = (\varphi_p^*)^{-1}]{} T_p M \xrightarrow[df(p)]{} T_q N \xrightarrow[\psi_q^*]{} \mathbb{R}^n$$ jest liniowe.

$\boxed{c_v(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t \cdot v)}$

$$\psi_q^* \circ df_p \circ \lambda_{\varphi,p}(v) = \psi_q^* \circ df_p([c_v, 0]) = \psi_q^*([f \circ c_v, 0]) =$$
$$= (\psi \circ f \circ c_v)'(0) = [(\psi f \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_v)]'(0) = D_{\varphi(p)}(\psi f \varphi^{-1})[(\varphi \circ c_v)'(0)] =$$
$$= \underbrace{D_{\varphi(p)}(\psi f \varphi^{-1})[v]}_{\text{działanie macierzy na } v \text{ - liniowe!}}$$ □

VERTE →

Dla $f: M \to N$ gładkiego, $p \in M$, $q = f(p)$, zdefiniowaliśmy różniczkę $df_p : T_pM \to T_qN$, i wyliczyliśmy ją w mapach φ wokół p i ψ wokół q jako:

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\lambda_{\varphi,p}} T_pM \xrightarrow{df_p} T_qN \xrightarrow{\psi_q^*} \mathbb{R}^n$$

$$\psi_q^* \, df_p \, \lambda_{\varphi,p}(v) = D_{\varphi(p)}(\psi f \varphi^{-1})[v]$$

Stąd, odwzorowanie df_p w ~~mapach~~ bazach

$\left\{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)\right\}$ w T_pM, $\left\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(q)\right\}$ w T_qN

zapisuje się macierzą $D_{\varphi(p)}(\psi f \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial (\psi f \varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(\varphi(p))\right)_{ij}$

czyli ma postać

$$df_p\left[\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)\right] = \sum_i \left[\sum_j \frac{\partial (\psi f \varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(\varphi(p)) \cdot a_j\right] \frac{\partial}{\partial \psi_i}(q)$$

UWAGI PORZĄDKUJĄCE / PRZYKŁADY.

(1) Niech $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mapa wokół $p \in M$. Możemy ją potraktować jako gładkie odwzorowanie pomiędzy rozmaitościami. Wówczas różniczka

$$d\varphi_p : \underset{\substack{\| \text{ćw.} \\ T_pM}}{T_pU} \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$$

, po kanonicznym utożsamieniu $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}^n$,

jest równe odwzorowaniu „mapowemu" $\varphi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n$.

Dowód: Niech $[c, t_0] \in T_pM$.

$$d\varphi_p([c,t_0]) = [\varphi \circ c, t_0] \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$$

kanonicznie utożsamione przez „mapę" $(id_{\mathbb{R}^n})^*_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ z

$$(id_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi \circ c)'(t_0) = (\varphi \circ c)'(t_0)$$

Z kolei $\varphi_p^*([c,t_0]) = (\varphi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ z definicji. $\square$

(2) Dla krzywej gładkiej $c : (a,b) \to M$, oraz $t_0 \in (a,b)$, różniczka

$$dc_{t_0} : \underset{\substack{\cong \\ \mathbb{R}}}{T_{t_0}(a,b)} \to T_{c(t_0)}M$$

jest tym jedynym przekształceniem liniowym, które wersor z $\mathbb{R} \cong T_{t_0}(a,b)$ przeprowadza na wektor $[c, t_0] = c'(t_0) \in T_{c(t_0)}M$. $\square$ ćw.

3 Różniczka funkcji gładkiej $f: M \to \mathbb{R}$ oraz pochodna kierunkowa.

• Niech $f: M \to \mathbb{R}$, $p \in M$. Wówczas różniczka $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym na T_pM.

• Pochodna kierunkowa. Dla wektora stycznego $X \in T_pM$ pochodną z funkcji $f: M \to \mathbb{R}$ (lub ogólniej $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset M$ otwarte, $p \in U$) w kierunku X, (ozn. Xf,) nazywamy liczbę $df_p(X)$; $\boxed{\text{oznaczamy ją } Xf.}$

$\boxed{\text{Zachodzi}}$

$$df_p(X) = df_p([c, t_0]) = \underbrace{[f\circ c, t_0]}_{\in T_{f\circ c(t_0)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}} = \boxed{(f\circ c)'(t_0)}$$

dla dowolnej krzywej (c, t_0) takiej, że $X = [c, t_0]$.

WŁASNOŚCI:

(1) $X(f+g) = Xf + Xg$; $X(f\cdot g) = g(p)\cdot Xf + f(p)\cdot Xg$

(reguła Leibniza)

VERTE: Dd (1)(b)

(2) $(aX)f = a\cdot Xf$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$

(3) Jeśli $X, Y \in T_pM$ to $(X+Y)f = Xf + Yf$.

Dowód (3): $(X+Y)f = df_p(X+Y) = df_p(X) + df_p(Y) = Xf + Yf$. □

• PRZYKŁADY. (1) Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładka, to $Xf = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. [Stąd oznaczenie $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ mające charakter „operatorowy” związany z działaniem tego wektora na funkcjach f.]

VERTE (1)

(2) Jeśli $X = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p) \in T_pM$, $f: M \to \mathbb{R}$ gładka, to

$$Xf = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \overset{\text{ozn.}}{=:} \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(p)$$

[≈ „i-ta pochodna cząstkowa f w mapie φ w punkcie p”].

verte (2)
NIEKONIECZNIE?

(1) Podobnie, jeśli $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$

to $Xf(p) = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$

Dowód (1)(b): $X = [c, t_0]$

$$X(f\cdot g) = [(f\cdot g)\circ c]'(t_0) = [(f\circ c)\cdot(g\circ c)]'(t_0) =$$

$$= (f\circ c)'(t_0)\cdot (g\circ c)(t_0) + (f\circ c)(t_0)\cdot (g\circ c)'(t_0) =$$

$$= Xf\cdot g(p) + f(p)\cdot Xg. \ \square$$

(2) ~~Rozst~~ Gdy $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)$ to

$$Xf = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(p) = \sum_i a_i \frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

WIĄZKA STYCZNA – jako rozmaitość

$TM = \dot{\bigcup}_{p\in M} T_pM$ – wiązka styczna jako zbiór

rzutowanie $\pi : TM \to M$, $\pi(v) = p$ dla $v \in T_pM$

(przyporządkowanie wektorowi jego punktu zaczepienia – – punktu, w którym jest styczny do M)

LEMAT. M rozmaitość n-wymiarowa klasy C^k, $k \geq 1$. Wówczas na wiązce stycznej TM istnieje naturalna struktura $2n$-wymiarowej rozmaitości klasy C^{k-1}, dla której rzutowanie π jest C^{k-1}-różniczkowalne.

(UWAGA: gdy M gładka (C^∞) to TM i π też gładkie (C^∞).)

Dowód: Strukturę rozmaitości zadamy za pomocą zgodnych map, nie definiując wcześniej topologii na TM. Mapy na TM będą zdefiniowane za pomocą map na M.

Niech (U,φ) będzie mapą dla M.

Rozważmy zbiór $TU = \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p\in U} T_pM \subset TM$ oraz odwzorowanie

$$\tilde{\varphi} : TU \to \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\varphi}(v) = \left(\varphi(\pi(v)), \varphi^*_{\pi(v)}(v)\right)$$

[$\tilde{\varphi}$ różnowartościowe, obraz $\tilde{\varphi}$ to $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ – otwarty podzbiór w $\mathbb{R}^{2n}$].

Odwzorowania przejścia: $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U\cap V) \times \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{\psi}\tilde{\varphi}^{-1}(x,w) = \left(\boxed{\psi\pi(\varphi\pi)^{-1}}(x), \psi^*_{\varphi^{-1}(x)}\left(\varphi^*_{\varphi^{-1}(x)}\right)^{-1}(w)\right) =$$

patrz dod. kartka na czerwono

$$= \left(\psi\varphi^{-1}(x), D_x(\psi\varphi^{-1})(w)\right)$$ różniczkowalne klasy C^{k-1}.

Różniczkowalność rzutowania π:

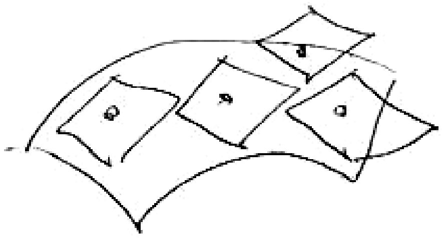
Wyrażamy π lokalnie w mapach (U,φ) na M oraz $(TU,\tilde{\varphi})$ na TM

dla $p \in U$, $v \in T_pU$, stosując oznaczenia $x = \varphi(p)$, $\tilde{\varphi}(v) = (x,w)$, dostajemy

$$\varphi\pi\tilde{\varphi}^{-1}(x,w) = \varphi\pi(v) = \varphi(p) = x$$

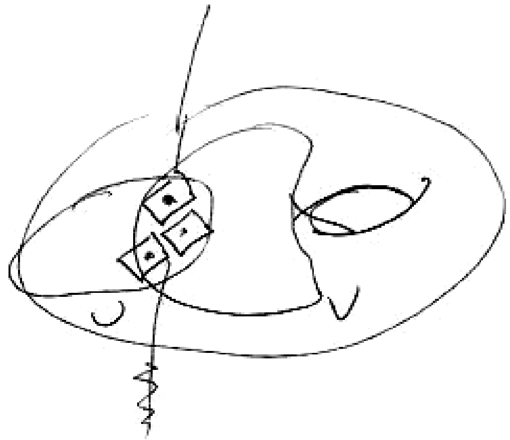
a więc π jest w tych mapach rzutowaniem na pierwszy czynnik $\mathbb{R}^n$, więc gładkie. □

Ad $\boxed{8}$



$$\psi(U \times V)\times\mathbb{R}^n \xleftarrow{\tilde\psi} TU\cap TV \xrightarrow{\tilde\varphi} \varphi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n$$

$$TU\cap TV = T(U\cap V)$$



$$\boxed{\tilde\varphi(v) = (\varphi(p),\ \varphi^*_p(v)) \quad \text{dla } v\in T_pM}$$

$$(\psi(p), \psi^*_p(v)) \xleftarrow{\tilde\psi} v \xrightarrow{\tilde\varphi} (\varphi(p),\ \varphi^*_p(v))$$

$v \in T_pM$, $p\in U\cap V$, $\varphi(p) = x$, $\varphi^*_p(v) = \omega$

$(x,\omega)\in\varphi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n$, $x=\varphi(p)$

$$\tilde\psi\tilde\varphi^{-1}(x,\omega) = \Big(\psi\varphi^{-1}(x),\ \underbrace{\psi^*_p\overbrace{(\varphi^*_p)^{-1}}^{=\eta_{\varphi(p)}}}_{=D_{\varphi(p)}(\psi\varphi^{-1})}(\omega)\Big) =$$

$$= \big(\psi\varphi^{-1}(x),\ D_{\underset{=\varphi(p)}{x}}(\psi\varphi^{-1})\cdot\omega\big)$$

Def. Dla $f: M \to N$, odwzorowaniem stycznym $df: TM \to TN$ nazywamy odwzorowanie

$$df(v) = df_{\pi(v)}(v) \in T_{f(\pi(v))}N \subset TN$$

LEMAT. Jeśli f jest gładkie, to df też.

Dowód: Niech $v \in T_pM$, ~~...~~ (U,φ) - mapa wokół p, (V,ψ) - mapa wokół $q = f(p)$. Wyrazimy df lokalnie w mapach $\tilde{\varphi}: TU \to \mathbb{R}^{2m}$, $\tilde{\psi}: TV \to \mathbb{R}^{2n}$

$$\mathbb{R}^{2m} \xrightarrow{\tilde{\varphi}^{-1}} TU \xrightarrow{df} TV \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathbb{R}^{2n}$$ (składanie tam gdzie to ma sens)

$$\tilde{\psi} \circ df \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x,w) = \left(\psi f \varphi^{-1}(x), \psi^*_{f\varphi^{-1}(x)} \circ df_{\varphi^{-1}(x)} (\varphi^*_{\varphi^{-1}(x)})^{-1}(w)\right) \overset{(1)}{=}$$

$$= \left(\psi f \varphi^{-1}(x), d\psi_{f\varphi^{-1}(x)} \circ df_{\varphi^{-1}(x)} (d\varphi_{\varphi^{-1}(x)})^{-1}(w)\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= \left(\psi f \varphi^{-1}(x), d\psi_{f\varphi^{-1}(x)} \circ df_{\varphi^{-1}(x)} \circ d\varphi^{-1}_x(w)\right) \overset{(3)}{=}$$

$$= \left(\psi f \varphi^{-1}(x), d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_x(w)\right) = \left(\psi f \varphi^{-1}(x), D_x(\psi f \varphi^{-1}) \cdot w\right)$$

od razu!

Równość (1) wynika z utożsamienia $d\varphi_p = \varphi_p^*$ dla map φ; (2) to ogólny fakt, że jeśli f jest dyfeo to $(df_p)^{-1} = df^{-1}_{f(p)}$; (3) to ogólny fakt, że $d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p$ [a także $d(f \circ g) = df \circ dg$]. [ĆW]

W współrzędnych $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_x$, jako macierz, zależy gładko od x. Stąd gładkość df w mapach $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$, czyli gładkość. □

DODATKOWY WNIOSEK

w bazach $\left\{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)\right\}$ w T_pM $\left\{\frac{\partial}{\partial \psi_j}(q)\right\}$ w T_qN

różniczka df_p

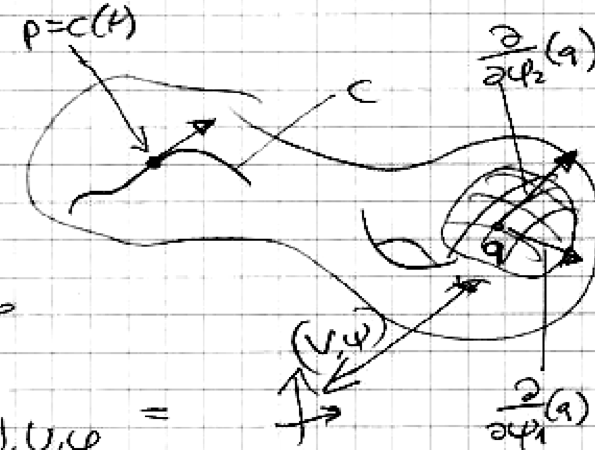
zapisuje się macierzą

$$D_{\varphi(p)}(\psi f \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial(\psi f \varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(\varphi(p))\right)_{i,j}$$

czyli na parkcie

$$df_p\left[\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)\right] = \sum_i\left[\sum_j \frac{\partial(\psi f \varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(\varphi(p)) \cdot a_j\right]\frac{\partial}{\partial \psi_i}(q)$$

DOPOWIEDZENIA



- dla krzywej $c:(a,b)\to M$

+ <u>wektor styczny</u> do c w $t\in(a,b)$ to

$$c'(t):=[c,t]=\left[(\varphi\circ c)'(t)\right]_{c(t),U,\varphi}=$$

$$=\sum_i (\varphi\circ c)_i'(t)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(c(t))\in T_{c(t)}M$$

+ • Wektory bazowe $\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(q)$ [względem mapy (V,φ) wokół q] to wektory styczne do linii siatki współrzędnych lokalnych zadanych przez tę mapę

- $\varphi_p^*:T_pM\to\mathbb{R}^n$ w interpretacji kinematycznej jest zadane przez

$$\varphi_p^*(\underset{T_pM}{\underset{\cap}{[c,t]}})=(\varphi\circ c)'(t)\in\mathbb{R}^n$$

- gdy $M=U\subset\mathbb{R}^n$, $p\in U$, (U,id) - mapa na M

 to $id_p^*:T_pM\to\mathbb{R}^n$

 jest naturalnym utożsamieniem $\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}^n_p=T_pM$