PRZYPOMNIENIA.

<u>Def.</u> <u>wektor styczny</u> $v \in T_pM$, $p \in M$,

to klasa relacji styczności dla krzywych (c, t_0) zbazowanych w p (klasa krzywej (c,t_0) oznaczana jest przez $[c, t_0]$).

- Np. gdy $p \in U \underset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, $\quad e_i = (0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0)$

  to $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) := [t \mapsto p + t\cdot e_i,\ t=0]$.

- Gdy $p \in M$ zaś (U,φ) jest mapą wokół p, to

  $$\frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p) := [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\cdot e_i),\ t=0].$$

<u>Def/Fakt</u>: Dla gładkiego $f: M \to N$, <u>różniczka</u> f w $p \in M$ to <u>liniowe</u> odwzorowanie $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ zadane przez $df_p([c,t_0]) = [f\circ c, t_0]$.

<u>WIĄZKA STYCZNA</u> $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ ma strukturę <u>gładkiej</u> <u>$2n$-wym. rozmaitości</u> z mapami $\tilde{\varphi}$ pochodzącymi od map (U,φ) na M, określonymi na $TU = \bigcup_{p\in U} T_pM$, zadanymi przez

$$\tilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)\right) = (\varphi(p); a_1, \dots, a_n) \in \varphi(U)\times\mathbb{R}^n \underset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^{2n}$$

PRZYKŁAD. Dla otwartego $U \subset \mathbb{R}^n$, wiązka styczna TU do U utożsamia się z $U\times\mathbb{R}^n$ poprzez $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \longrightarrow (p; a_1, \dots, a_n)$.

FAKT. Naturalne rzutowanie $\pi: TM \to M$, $\pi(v) = p$ $\forall v \in T_pM$, jest <u>gładkie</u>.

DEF. Dla $f: M\to N$ gładkiego, mamy odwzorowanie <u>styczne</u>

$df: TM \to TN$ określone jako „suma różniczek":

dla $\underset{TM}{\underset{\cap}{v \in T_pM}}$, $\quad df(v) := df_p(v) \in T_{f(p)}N \subset TN$.

FAKT. $df: TM \to TN$ jest gładkie.

POLA WEKTOROWE

Def. ~~Niech~~ M gładka rozmaitość. Gładkim polem wektorowym na M nazywamy ~~dowolne~~ gładkie odwzorowanie $X: M \to TM$ t.że

$\forall p\in M \quad X(p)\in T_pM\subset TM$ (równoważnie, $\pi\circ X = id_M$, $\pi(X(p))=p$).

OZNACZENIE. Często zamiast $X(p)$ pisze się krócej X_p (wektor pola wektorowego X w punkcie p).

Wyrażenie w mapach (U,φ) na M oraz $(TU,\tilde\varphi)$ na TM:

$$\tilde\varphi\circ X\circ\varphi^{-1}(x) = (x,[a_1(x),\dots,a_n(x)]) = \Big(x, \sum_i a_i(x)e_i\Big) \in \varphi(U)\times\mathbb{R}^n$$

gdzie $a_i:\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\varphi(U)}}\to\mathbb{R}$ są gładkimi funkcjami nazywanymi (współrzędnymi pola X w mapach φ i $\tilde\varphi$).

Zgodnie z oznaczeniem $\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p) = (\varphi_p^*)^{-1}(e_i)$, oraz określeniem $\tilde\varphi$, mamy stąd

$$X(p)=\sum_i a_i(\varphi(p))\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p). \quad [w]$$

Funkcje $a_i\circ\varphi:\underset{M}{\underset{\cap}{U}}\to\mathbb{R}$ są gładkie (bo w mapie φ: $(a_i\circ\varphi)\circ\varphi^{-1} = a_i$ ~~gładkie~~)

– oznaczmy $b_i = a_i\circ\varphi$. Wtedy $X(p)=\sum_i b_i(p)\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p)$ dla $p\in U$.

Stąd dostajemy:

FAKT. $X: M\to TM$ jest gładkim polem wektorowym na M $\iff$ w mapach (U,φ) na M wyraża się jako $X(p)=\sum_i b_i(p)\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p)$ dla pewnych gładkich $b_i: U\to\mathbb{R}$.

WNIOSEK. Suma $(X+Y)(p) := X(p)+Y(p)$ dwóch gładkich pól wektorowych jest gładkim polem wektorowym.
Iloczyn $(f\cdot X)(p) := f(p)\cdot X(p)$ gładkiego pola X ~~pne~~ i gładkiej funkcji $f:M\to\mathbb{R}$ jest gładkim polem wektorowym.

VERTE →

UWAGA. (pole wektorowe na otwartych $U \subset \mathbb{R}^n$).
lub $U \subset \mathbb{H}^n$

~~Bezpo~~ Mają one postać

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$$

dla pewnych gładkich funkcji $a_i : U \to \mathbb{R}$.

Będziemy też pisać $X(x) = [a_1(x), \cdots, a_n(x)] \in \mathbb{R}^n \cong T_x U$.

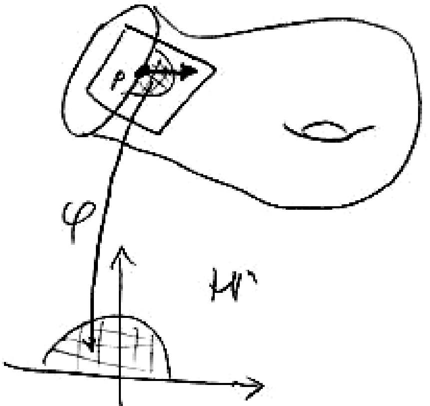
Rozmaite zapisy lokalne dla pól na rozmaitościach będziemy wyrażać (przez pośrednictwo map) za pomocą pól na otwartych podzbiorach $\mathbb{R}^n$. (lub $\mathbb{H}^n$).

OZN. Rodzinę wszystkich gładkich pól wektorowych na M oznaczamy przez $C^\infty(TM)$ lub $\mathfrak{X}(M)$. Algebraicznie jest to moduł nad pierścieniem $C^\infty(M)$ gładkich funkcji rzeczywistych na M.

PRZYKŁAD - zdefiniowanie pola wektorowego o wymaganych własnościach za pomocą rozkładu jedności.

M - rozmaitość z niepustym brzegiem ∂M

Def. Wektor $Y \in T_pM$, dla $p \in \partial M$, jest skierowany „do wnętrza" M jeśli w pewnej mapie $\varphi : U_p \to H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ wyraża się przez $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)$, przy czym $a_n > 0$.



ĆWICZENIE. Jeśli tak jest w jednej mapie to jest tak też w każdej innej mapie wokół p. Ponadto, suma wektorów skierowanych do wnętrza jest wektorem skierowanym do wnętrza; iloczyn wektora skierowanego do wnętrza przez liczbę dodatnią jest wektorem skierowanym do wnętrza.

Def. Pole wektorowe $X : M \to TM$ jest skierowane do wnętrza M jeśli $\forall p \in \partial M$ $X(p)$ jest skierowany do wnętrza M.

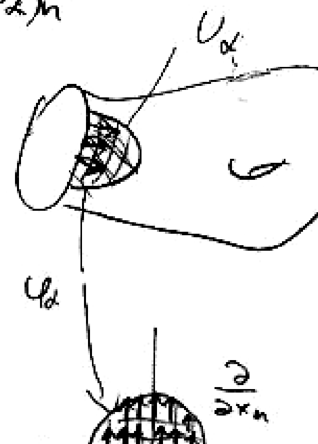
FAKT. Na M istnieje gładkie pole wektorowe X skierowane do wnętrza M.

Dowód:

Rozważmy rozkład jedności $\{f_i\}$ wpisany w pokrycie M zbiorami mapowymi, ~~[illegible]~~ U_α, i niech $supp(f_i) \subset U_{\alpha_j}$.

Dla tych U_α które zahaczają o brzeg ∂M określmy pole wektorowe

$X_\alpha : U_\alpha \to TU_\alpha \subset TM$ wzorem $X_{\alpha_j}(p) = \frac{\partial}{\partial(\varphi_\alpha)_n}(p)$



(częściowe pole na M skierowane do wnętrza).

Dla pozostałych U_α określmy X_α dowolnie.

Następnie zdefiniujmy:

$$X := \sum_j f_i \cdot X_{\alpha_j}$$

(lokalnie skończona kombinacja gładkich pól skier. do wew. i funkcji ~~nieujemnych~~ dodatnich, więc skier. do wew. !). □

UWAGA. (przenoszenie gładkich pól wektorowych przez dyfeomorfizmy). ⟨pre 3⟩

Niech $f : M \to N$ dyfeomorfizm, i niech $X \in \mathfrak{X}(M)$ - gładkie pole na M.

Poszczególne wektory X_p $(= X(p))$ pola X, przenoszone przez odwzorowanie styczne df do TN, tworzą pole wektorowe na N, oznaczone przez $df(X)$, w ten sposób, że

$$df_p(X_p) = df(X)_{f(p)}.$$

Równoważnie, określamy pole wektorowe $df(X)$ na N przez

$$df(X)_q := df_{f^{-1}(q)}\left(X_{f^{-1}(q)}\right) \in T_qN.$$

Powyższe określenia oznaczają, że pole $df(X)$, jako odwzorowanie $N \to TN$, jest złożeniem

$$df(X) = df \circ X \circ f^{-1}.$$

Jako złożenie trzech odwzorowań gładkich jest ono zatem gładkie.

WNIOSEK. Wyżej określone odwzorowanie $df(X) : N \to TN$ jest gładkim polem wektorowym na N.
Będziemy je nazywać przeniesieniem pola X na N przez dyfeomorfizm f.

UWAGA. Jeśli o dyfeomorfizmie f myślimy jako o sposobie utożsamienia rozmaitości M i N, to o polu $df(X)$ na N możemy myśleć jako tym samym polu co pole X na M, względem utożsamienia M z N za pomocą f.

PRZYKŁAD - wyrażenie pola w mapie na rozmaitości:

$X \in \mathfrak{X}(M)$

pre 3!

Jeśli dla mapy (U,φ) na X mamy

$$X(p) = \sum a_i(p) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p) \quad \text{gdy } p \in U \quad \text{to}$$

① przeniesienie pole $X|_U$ na $\varphi(U)$ przez ~~...~~ dyfeo φ daje pole $d\varphi(X)(x) = \sum a_i(\varphi^{-1}(x)) \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$

② wyrażenie pola X w ~~...~~ mapach (U,φ) na M oraz $(TU, \tilde{\varphi})$ na TM daje

$$\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(x) = (x, [a_1(\varphi^{-1}(x)), \dots, a_n(\varphi^{-1}(x))])$$

Obie te rzeczy, a zwłaszcza ①, będziemy nazywać

<u>wyrażeniem pola X w ~~...~~ mapie (U,φ).</u>

Zachodzą ponadto zależności (które za chwilę uzasadnimy):

• ~~...~~ $X(p) = [c, t_0] \iff d\varphi(X)(\varphi(p)) = [\varphi \circ c, t_0]$

$\boxed{3}$

KRZYWE CAŁKOWE I POTOKI PÓL WEKTOROWYCH

M - rozmaitość bez brzegu

DEF. Krzywa całkowa pola wektorowego $X \in \mathfrak{X}(M)$ to dowolna krzywa $\gamma:(a,b)\to M$ taka, że $\forall t\in(a,b)$ $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$.

$$\gamma'(t) = [\gamma, t] = d\gamma_t\left(\tfrac{\partial}{\partial t}(t)\right) \in T_{\gamma(t)}M$$

Przypomnienie: $df(X)_{f(p)} = df_p(X_p)$

LEMAT POMOCNICZY. γ jest krzywą całkową pola $X \in \mathfrak{X}(M) \iff$ dla każdej mapy (U,φ) na M krzywa $\varphi\circ\gamma$ [γ wyrażona w mapie φ] jest krzywą całkową pola $d\varphi(X) \in \mathfrak{X}(\varphi(U))$.

Dowód $\Rightarrow$: Jeśli $\gamma'(t) = [\gamma, t] = X_{\gamma(t)}$ to, z def $d\varphi$,

$$(\varphi\circ\gamma)'(t) = [\varphi\circ\gamma, t] \overset{= d\varphi_{\gamma(t)}([\gamma,t]) =}{=} d\varphi_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) = d\varphi(X_{\gamma(t)}) = d\varphi(X)_{\varphi\circ\gamma(t)}. \square$$

Dowód $\Leftarrow$: Jeśli $(\varphi\circ\gamma)'(t) = [\varphi\circ\gamma, t] = d\varphi(X)_{\varphi\circ\gamma(t)}$ to

$$\gamma'(t) = [\varphi^{-1}(\varphi\circ\gamma)]'(t) = d\varphi^{-1}_{\varphi\circ\gamma(t)}[(\varphi\circ\gamma)'(t)] \overset{= d\varphi^{-1}_{\varphi\circ\gamma(t)}[d\varphi(X)_{\varphi\circ\gamma(t)}] =}{=} \underbrace{d\varphi^{-1}_{\varphi\circ\gamma(t)}\, d\varphi_{\gamma(t)}}_{id_{T_{\gamma(t)}M}}(X_{\gamma(t)}) = X_{\gamma(t)}. \square$$

- ISTNIENIE KRZYWYCH CAŁKOWYCH: $\forall p\in M$ istnieje krzywa całkowa o początku w p, tzn. krzywa całkowa $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ t.że $\gamma(0)=p$.

Dowód: Niech $d\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$, $\varphi(p) = x_0 \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$

Wystarczy pokazać, iż istnieje krzywa całkowa pola $d\varphi(X)$ o początku x_0.

Taka krzywa jest rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego w $\mathbb{R}^n$

$$c'(t) = [a_1(c(t)), \dots, a_n(c(t))]$$ z warunkiem początkowym $c(0) = x_0$. $\square$

LEMAT POMOCNICZY: Krzywe całkowe wyrażenia pola X w mapie (U,φ) to wyrażenie krzywych całkowych pola X w tej samej mapie

- JEDNOZNACZNOŚĆ: Krzywe całkowe $\gamma_1, \gamma_2 : (a,b) \to M$ pola $X \in \mathfrak{X}(M)$ takie że $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ dla pewnego $t_0 \in (a,b)$ są równe.

  D-d: zbiór $A := \{t \in (a,b) : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$ jest ~~domknięty~~

  domknięty – z ciągłości γ_1, γ_2

  otwarty – z lokalnej jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwycz.

  niepusty – ~~...~~ $t_0 \in A$.

  Stąd $A = (a,b)$. $\square$

- GŁADKA ZALEŻNOŚĆ OD PUNKTU POCZĄTKOWEGO – LOKALNIE:
  $\forall p \in M \ \exists U_p \subset M, p \in U_p, \ \exists \varepsilon > 0 \ \exists \Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p \to M$ gładkie, t.że
  $\forall q \in U_p$ $\gamma_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ określone przez $\gamma_q(t) := \Gamma(t,q)$ jest krzywą całkową pola X o początku w q.

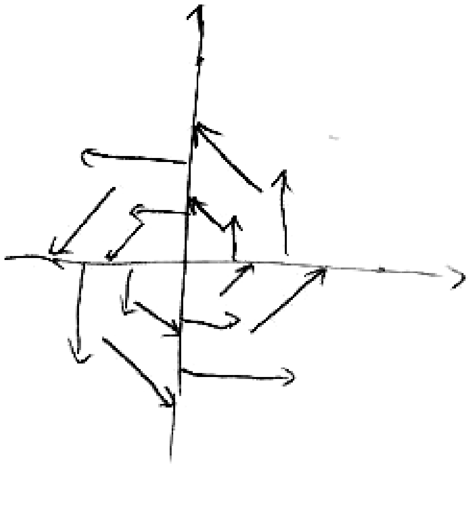
  Dowód: wynika z analogicznego faktu dla równań różniczkowych zwyczajnych. $\square$

- Def. Pole wektorowe $X \in \mathfrak{X}(M)$ jest zupełne jeśli $\forall p \in M$ istnieje krzywa całkowa $\gamma : \mathbb{R} \to M$ o początku w p (tzn. każda lokalna krzywa całkowa przedłuża się do całego $\mathbb{R}$).

PRZYKŁAD. Pole $X(x,y) = -y \frac{\partial}{\partial x}(x,y) + x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x,y)$ na $\mathbb{R}^2$ jest zupełne.
Krzywe całkowe mają postać

$$\gamma(t) = \big(r \cdot \cos(t + t_0),\ r \cdot \sin(t + t_0)\big),$$

są określone na całym $\mathbb{R}$.



To samo pole na $\mathrm{int}(\mathbb{H}^2) = \{(x,y) : y > 0\}$ nie jest zupełne.

FAKT. Jeśli $X \in \mathfrak{X}(M)$ jest zupełne, zaś $\forall p \in M$ $\gamma_p : \mathbb{R} \to M$ jest (maksymalnie przedłużoną) krzywą całkową pola X o początku w p, to $\Gamma : \mathbb{R} \times M \to M$ dane przez $\Gamma(t,p) = \gamma_p(t)$ jest gładkie.
Ponadto, $\forall t \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $\varphi_t = \varphi_t^X : M \to M$ zadane przez $\varphi_t(p) = \gamma_p(t)$ jest dyfeomorfizmem rozmaitości M, a przyporządkowanie $t \mapsto \varphi_t$ jest homomorfizmem grupy $\mathbb{R}$ w grupę dyfeomorfizmów M, $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$.

Dowód: Z gładkiej lokalnej zależności od punktu początkowego wynika gładka globalna zależność, identycznie jak dla równań różniczkowych zwyczajnych. Stąd gładkość Γ.

Zatem $\varphi_t = \Gamma(t, \cdot)$ jest gładkim odwzorowaniem $M \to M$.
Oczywiście $\varphi_0 = id_M$.
Ponadto, zachodzi $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ $\forall t,s \in \mathbb{R}$, bo

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(\varphi_s(p)) = X(\varphi_t(\varphi_s(p)))$$
$$\frac{d}{dt}\varphi_{s+t}(p) = X(\varphi_{s+t}(p))$$

więc obie krzywe $t \mapsto \varphi_t(\varphi_s(p))$ oraz $t \mapsto \varphi_{t+s}(p)$ są krzywymi całkowymi pola X o początku $\varphi_s(p)$; z jednoznaczności są one równe.

Z własności $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ wynika że

- φ_t jest dyfeomorfizmem – bo $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = id_M$
- $t \mapsto \varphi_t$ jest homomorfizmem $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$. $\square$

TERMINOLOGIA: Rodzina $\{\varphi_t = \varphi_t^X\}$ jest nazywana:
potokiem pola X, jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów generowaną przez X, potokiem fazowym pola X. Krzywe całkowe $t \mapsto \varphi_t(p)$ są też nazywane trajektoriami potoku $\{\varphi_t\}$, krzywymi fazowymi pola X, liniami sił, itp.
trajektoriami pola X

VERTE →

PRZYKŁAD:

W przypadku pola (zupełnego) $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\cdot\frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$ mamy

potok $\varphi_t^X(x,y) = (x\cdot\cos t - y\cdot\sin t,\ x\cdot\sin t + y\cdot\cos t)$

[φ_t^X jest obrotem wokół $(0,0)$ o kąt t].

DEF. Jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów na rozmaitości M nazywamy
- każdy homomorfizm $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ gładko zależny od $t \in \mathbb{R}$, lub równoważnie
- każdą rodzinę $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ dyfeomorfizmów, gładko zależną od t, taką że $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ $\forall s,t \in \mathbb{R}$.

FAKT. Każda jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów M jest potokiem pewnego zupełnego (wektorowego) pola $X \in \mathfrak{X}(M)$.

<u>Dowód</u> podamy za chwilę, w ramach ogólniejszego stwierdzenia. □