Pole wektorowe $X \in \mathcal{X}(M)$ które nie jest zupełne wyznacza jedynie tzw. <u>lokalną</u> <u>jednoparametrową</u> <u>grupę dyfeomorfizmów</u> tzn. rodzinę $\{(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \Phi^\alpha_*)\}_\alpha$ taką że

(1) • zbiory $U_\alpha \subset M$ są otwarte i pokrywają M

(2) • $\Phi^\alpha : (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha \to M$ gładkie

(3) • $\Phi(0,p) = p, \ \forall p \in U_\alpha$

(4) • oznaczając $\Phi^\alpha_t(p) := \Phi^\alpha(t,p)$, $p \in U_\alpha$, $t \in (\varepsilon_\beta, \varepsilon_\beta)$

jeśli s, t, $s+t \in (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ oraz $\Phi^\alpha_s(p) \in U_\beta$ to $\Phi^\beta_t \circ \Phi^\alpha_s(p) = \Phi^\alpha_{t+s}(p)$

UWAGA. (4) zachodzi także dla $\beta = \alpha$.

Każdy $(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \Phi^\alpha)$ tworzony z lokalnych krzywych całkowych pola X gładko zależnych od punktu początkowego, czyli taki, że

$t \mapsto \Phi^\alpha(t,p)$, $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \to M$, jest krzywą całkową pola X o początku p [czyli $\Phi^\alpha(0,p) = p$, $\frac{\partial}{\partial t}\Phi^\alpha(t,p) = X(\Phi^\alpha(t,p))$]

TERMINOLOGIA. Taką rodzinę też nazywamy <u>potokiem</u> pola X, zaś X nazywamy jej <u>polem generującym</u>, lub <u>generatorem infinitezymalnym</u> potoku X.

TWIERDZENIE. Każda <u>lokalna</u> jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów na rozmaitości M jest potokiem pewnego pola wektorowego $X \in \mathcal{X}(M)$. Ponadto, jeśli mamy prawdziwą jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów, to generujące ją pole X jest zupełne.

[abstrakcyjną]

Dowód: określmy pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ wzorem:

jeśli $p \in U_\alpha$ to $X(p) := \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Phi^\alpha(t,p) \in T_pM$ z (3)

• Jest to oczywiście gładkie pole na pojedynczym U_α

VERTE gładkość $\to$

• Dobra określoność:

Mamy pokazać, że jeśli $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ to

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Phi^\alpha(t,p) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Phi^\beta(t,p) . \square$$

Z warunku (4) zastosowanego do $s=0$

$$\left[\text{bo wtedy } \Phi^\alpha_s(p) = \Phi^\alpha_0(p) \overset{(3)}{=} p \in U_\beta \right]$$

mamy $\Phi^\beta_t(p) \overset{(3)}{=} \Phi^\beta_t(\Phi^\alpha_0(p)) \overset{(4)}{=} \Phi^\alpha_{t+0}(p) = \Phi^\alpha_t(p)$ dla $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

gdzie $\varepsilon = \min[\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta]$

stąd równość. $\square$

• Stąd i z gładkości na U_α wynika gładkość X.

• Krzywe $t \mapsto \Phi^\alpha(t,p)$ są krzywymi całkowymi pola X:

Chcemy sprawdzić, że $\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \Phi^\alpha(t,p) = X(\Phi^\alpha(t_0,p))$

$\forall p \in U_\alpha \ \forall t_0 \in (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha)$

Skoro zbiory postaci U_α pokrywają całe M

$\exists \beta : \Phi^\alpha(t_0,p) \in U_\beta$ (może się zdarzyć, że $\beta = \alpha$)

Wtedy

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \Phi^\alpha(t,p) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Phi^\alpha(t_0+s,p) \overset{(4)}{=}$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Phi^\beta_s(\Phi^\alpha_{t_0}(p)) = X(\Phi^\alpha_{t_0}(p)) . \square$$

• Ostatnie zdanie tezy jest oczywiste. $\square$

gładkość:

pomocnicze pole Z na produkcie $(-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha$ zadane przez

$$Z(t,p) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=t} (s,p) = \frac{\partial}{\partial t}(t,p) \quad \text{jest gładkie}$$

Mamy więc gładkie $\quad Z : (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha \longrightarrow T\big[(-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha\big]$

$$\text{i} \quad d\Phi^\alpha : T\big[(-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha\big] \longrightarrow TM$$

a ponadto dla $p \in U_\alpha$ zachodzi

$$X(p) = d\Phi^\alpha \circ Z(0,p).$$

---

gładkość tego łatwo też sprawdzić w lokalnych mapach na U_α

TWIERDZENIE. Jeśli $X \in \mathfrak{X}(M)$ ma nośnik zwarty (tzn. zbiór $\mathrm{supp}(X) = \mathrm{cl}(\{p \in M : X(p) \neq 0\})$ jest zwartym podzbiorem M) to X jest zupełne.

UWAGA: na zwartej rozmaitości M każde pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ ma nośnik zwarty, więc każde jest zupełne!

Dowód: Możemy pokryć nośnik $\mathrm{supp}(X)$ skończoną rodziną zbiorów U_{α_i} dla których istnieją odpowiednie $\phi^{\alpha_i} : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \times U_{\alpha_i} \to M$.

Wtedy dla $\varepsilon = \min_i \{\varepsilon_i\}$, z każdego punktu $p \in M$ możemy wystartować krzywą całkową o początku w p określoną na przedziale $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Jednostajność tego ε na całym M pozwala przedłużać wszystkie krzywe całkowe w nieskończoność w obie strony. $\square$