PRZYPOMNIENIE

Derywacja - operator $D: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

- liniowy: $D(f+g) = D(f) + D(g)$, $D(c\cdot f) = c\cdot D(f)$ $\forall c \in \mathbb{R}$
- spełnia regułę Leibniza:

$$D(f\cdot g) = f\cdot D(g) + D(f)\cdot g.$$

FAKT. Istnieje wzajemnie jednoznaczna korespondencja

$$\left\{\begin{array}{c}\text{derywacje na}\\ \text{rozmaitości } M\end{array}\right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{\begin{array}{c}\text{gładkie pola}\\ \text{wektorowe } X\\ \text{na rozmaitości } M\end{array}\right\}$$

zadana przez działanie pola X na funkcjach f poprzez pochodną kierunkową w poszczególnych punktach $p \in M$:

$$Xf(p) := X_p \cdot f.$$

KOMUTATOR PÓL WEKTOROWYCH.

LEMAT. Niech X, Y będą polami wektorowymi na rozmaitości M. Wówczas operator $XY-YX: C^\infty M \to C^\infty M$ określony przez

$$f \mapsto XYf - YXf$$

jest derywacją.

Dowód: liniowość jest oczywista z liniowości X i Y jako operatorów na $C^\infty M$.

Reguła Leibniza:

$$(XY-YX)(f\cdot g) = XY(f\cdot g) - YX(f\cdot g) =$$

$$= X(g\cdot Yf + f\cdot Yg) - Y(f\cdot Xg + g\cdot Xf) =$$

$$= X(g\cdot Yf) + X(f\cdot Yg) - Y(f\cdot Xg) - Y(g\cdot Xf) =$$

$$= \underline{Yf\cdot Xg} + g\cdot(XYf) + Yg\cdot Xf + f\cdot(XYg) - \underline{Yf\cdot Xg} - f(YXg)$$

$$- Yg\cdot Xf - g\cdot(YXf) =$$

$$= g\cdot(XYf - YXf) + f(XYg - YXg) =$$

$$= g\cdot(XY-YX)f + f\cdot(XY-YX)g. \quad \square$$

UWAGA. Teza lematu jest zaskakująca, gdyż np. sam operator XY nie jest derywacją. Jest on operatorem rzędu 2, tzn. jego wartość na f zależy nie tylko od pierwszych ale i od drugich pochodnych cząstkowych f w lokalnych współrzędnych.
Okazuje się że składniki rzędu 2 w operatorach XY i $-YX$ kasują się, i zostają same składniki rzędu 1.

Def. Pole wektorowe na M odpowiadające derywacji $XY-YX$ oznaczać będziemy symbolem $[X,Y]$ i nazywać <u>komutatorem</u> pól X, Y.

WŁASNOŚCI KOMUTATORA.

(1) $[X,Y] = -[Y,X]$ antysymetryczność

(3) $[X+Y,Z] = [X,Z]+[Y,Z]$

(2) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$

tożsamość Jacobiego

(4) $[fX,Y] = f[X,Y] - Y(f)\cdot X$

$[X,fY] = Xf\cdot Y + f\cdot[X,Y]$

(4') $[cX,Y] = c[X,Y] = [X,cY]$.

dd (1): $-[Y,X] = -(YX - XY) = -YX + XY = XY - YX = [X,Y]$.

d-d (2): podobny. [ćw].

KOMUTATOR W LOKALNYCH WSPÓŁRZĘDNYCH

Niech $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ X_i, Y_i - funkcje współrzędnych

Wówczas $[X,Y]f = XYf - YXf = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum X_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$

$$= \sum_i X_i \left(\sum_j \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right) - \sum Y_i \sum_j \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

$$= \underline{\sum_{i,j} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}} + \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \underline{\sum_{i,j} Y_i X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}$$

$$- \sum_{i,j} Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\left[\sum_i \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

Stąd wynika, że

$$[X,Y] = \sum_j \left(\sum_i \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

współrzędne komutatora $[X,Y]$ wyrażone przez współrzędne pól X i Y.

Pochodne Liego:

UWAGA: na $\mathbb{R}^n$ pola wektorowe można różniczkować w różnych kierunkach, bo wektory styczne w jednym punkcie kanonicznie utożsamiają się (jako wektory pochodne) z wektorami stycznymi do $\mathbb{R}^n$ w innych punktach. Na rozmaitościach tak nie jest. Utożsamienia j.w. w różnych mapach są różne.

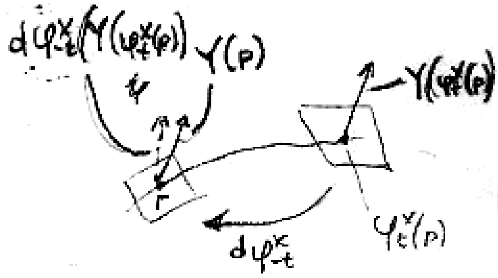
Def. Pochodną Liego $L_X Y(p)$ nazywamy wektor ~~styczny~~ z T_pM otrzymany jako

$$\lim_{t\to 0} \frac{d\varphi^X_{-t}|\left(Y(\varphi^X_t(p))\right) - Y(p)}{t}$$

h.b

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\varphi^X_{-t}\, Y(\varphi^X_t(p))$$

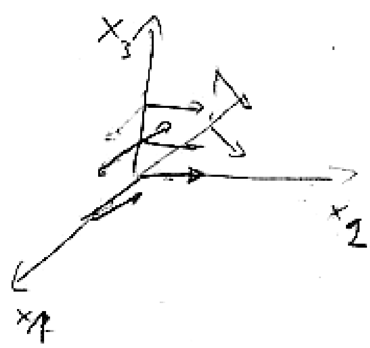
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(d\varphi^X_t\right)^{-1}\left[Y(\varphi^X_t(p))\right]$$



PRZYKŁAD (1). $M=\mathbb{R}^3$, $X=\frac{\partial}{\partial x_1}$;

$$\varphi^X_t(x_1,x_2,x_3)=(x_1+t,x_2,x_3) \qquad \Big[d\varphi^X_t : \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\parallel}{T_p\mathbb{R}^3}} \to \underset{\mathbb{R}^3}{T_{\varphi^X_t(p)}\mathbb{R}^3}\Big] = id$$

$$Y(x_1,x_2,x_3)=\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1\cdot\frac{\partial}{\partial x_3}$$



$p=(x_1,x_2,x_3)$

$\varphi^X_t(p)=(x_1+t,x_2,x_3)$

$$Y(\varphi^X_t(p))=\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_1+t)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\left(d\varphi^X_t\right)^{-1} Y(\varphi^X_t(p))=\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_1+t)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \text{ — '' — } = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Zatem $L_X(Y)=\frac{\partial}{\partial x_3}$

(2) $X(x,y) = x\cdot\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $\varphi_t^X(x,y) = (x\cos t - y\sin t,\ x\sin t + y\cos t)$

obrót o kąt t

$$\left[d(\varphi_t^X)_p : \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\parallel}{T_p\mathbb{R}^2}} \to \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\parallel}{T_{\varphi_t^X(p)}\mathbb{R}^2}} \right]_{p=(x,y)} \overset{= D_p\varphi_t^X =}{=} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

też obrót o kąt t

$$(d(\varphi_t^X)_p)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$Y(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (d\varphi_t^X)^{-1}\, Y(\varphi_t^X(x,y)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 0 \\ -\cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_X(Y)(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}. \ \square$$

UWAGA. Mimo że $X(0,0) = 0$ to i tak $L_X Y(0,0) \neq 0$!

TWIERDZENIE. $L_X Y = [X,Y]$.

Dowód: pokażemy że $L_X Y(p) = [X,Y](p)$ $\forall p \in M$.

Przypadek 1°: $X(p) \neq 0$

Z lematu o wyprostowaniu pola wektorowego, dobieramy mapę, w której $X(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $p=(0,\ldots,0)$,

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Wyliczamy

$$[X,Y](0) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[X_i(0)\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}(0) - Y_i(0)\frac{\partial X_j}{\partial x_i}(0)\right]\right)\frac{\partial}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y_j}{\partial x_1}(0)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \left(= \frac{\partial Y}{\partial x_1}(0) \text{ - jako pochodna funkcji o wartościach wektorowych}\right).$$

Wyliczamy pochodną Liego:

mamy $\varphi_t^X(x_1,\ldots,x_n) = (x_1+t, x_2,\ldots,x_n)$

$d\varphi_t^X = id_{\mathbb{R}^n} = (d\varphi_t^X)^{-1}$, zatem

$$L_X Y(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(d\varphi_t^X)^{-1}\,Y(\varphi_t^X(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\underbrace{(d\varphi_t^X)^{-1}}_{id_{\mathbb{R}^n}}\,Y(t,0,\ldots,0) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}Y(t,0,\ldots,0) = \frac{\partial}{\partial x_1}Y(0) = [X,Y](0). \quad \square$$

2 pomocne fakty do analizy przypadku 2° :

FAKT 1. $X:(a,b)\to T_pM$ gładka, $f: M\to\mathbb{R}$ gładka.
Wówczas $\frac{d}{dt}[X(t)f]=\left[\frac{d}{dt}X(t)\right]\cdot f$.

Dowód

FAKT 2 $X\in C^\infty(TM)$, $f\in C^\infty M$, $h: M\to N$ dyfeomorfizm.
Rozważmy $dh(X)\in C^\infty(TN)$, $f\circ h^{-1}\in C^\infty N$ –

– pole wektorowe X i funkcja f „przeniesione" na N przez h.

Wówczas $Xf(p) = dh(X)(fh^{-1})(h(p))$

lub równoważnie, dla $g\in C^\infty N$,

$$dh(X)\cdot g(q) = X\cdot(gh)(h^{-1}(q))$$

[biorąc $f=gh$, $p=h^{-1}(q)$]. $\square$ ćw.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}[X(t)\cdot f] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{X(t+\varepsilon)f - X(t)\cdot f}{\varepsilon} =$$

ciągłość poch. kier. wzgl. kier.

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}\cdot f\right) = \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}\right)\cdot f =$$

$$=\left[\frac{d}{dt}X(t)\right]\cdot f \quad \square$$

Przypadek 2°: $X(p)=0$

Zadziałajmy na dowolną funkcję gładką f wektorami $[X,Y](p)$ oraz $L_XY(p)$.

- $[X,Y](p)\cdot f = [X,Y]f(p) = XYf(p) - YXf(p) =$
$$= -YXf(p) \quad (\text{bo } X(p)=0)$$

- $X(p)=0$, czyli $\varphi_t^X(p)=p \ \forall t$.

$$(L_XY)f(p) = (L_XY)_p\cdot f = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\varphi_{-t}^X\left[Y(\varphi_t^X(p))\right]\right)f =$$

$$\overset{\varphi_t^X(p)=p}{=} \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\varphi_{-t}^X\left[Y(p)\right]\right)f \overset{\text{FAKT 1}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(d\varphi_{-t}^X(Y)\cdot f(p)\right) =$$

$$\overset{\text{FAKT 2}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[Y\cdot(f\varphi_{-t}^X)(\varphi_t^X(p))\right] \overset{\varphi_t^X(p)=p}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[Y\cdot(f\varphi_{-t}^X)(p)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Big[\underbrace{f\varphi_{-t}^X(\varphi_s^Y(p))}_{\substack{\text{gładka funkcja}\\ \text{zmiennych } t,s}}\Big] = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[f\varphi_{-t}^X\varphi_s^Y(p)\right] =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} -X\cdot f(\varphi_s^Y(p)) = Y(-Xf)(p) =$$

$$= -YXf(p) = [X,Y]f(p)$$

Z dowolności f, $\quad L_XY(p) = [X,Y](p)$. $\square$

WŁASNOŚCI POCHODNEJ LIEGO

(wynikające z np. własności komutatora)

$$L_X Y = -L_Y X$$

$$L_X[Y,Z] = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z]$$

– reguła Leibniza dla komutatora i pochodnej Liego

$$L_X(Y+Z) = L_X Y + L_X Z$$

$$L_{X+Y} Z = L_X Y + L_Y Z$$

$$L_X(fY) = Xf \cdot Y + f \cdot L_X Y$$

$$L_{fX} Y = f L_X Y - (Yf) \cdot X$$