PRZYPOMNIENIA

- komutator $[X,Y] = XY - YX$ pól wektorowych X, Y

  – operator derywacji, a więc pewne pole wektorowe

- pochodna Liego $\mathcal{L}_X Y$ – „różniczkowanie pola Y względem potoku pola X"

$$\mathcal{L}_X Y(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\varphi^X_{-t}\left(Y(\varphi^X_t(q))\right)$$

- FAKT. $[X,Y] = \mathcal{L}_X Y$.

KOMUTATOR A KOMUTOWANIE POTOKÓW

Def. Lokalne potoki pól X, Y na M komutują na otoczeniu punktu $p \in M$ jeśli $\exists \varepsilon > 0 \ \forall |t|, |s| < \varepsilon$ $\varphi_s^Y \circ \varphi_t^X(q) = \varphi_t^X \circ \varphi_s^Y(q)$. dla q bliskich p.

TWIERDZENIE. Lokalne potoki pól X, Y komutują na otoczeniu punktu p $\Longleftrightarrow$ $[X,Y] \equiv 0$ na pewnym otoczeniu punktu p.
($\equiv \mathcal{L}_X Y = 0$ na otoczeniu punktu p).

Dla dowodu $\Leftarrow$ potrzebujemy

FAKT. $\varphi : M_1 \to M_2$ dyfeomorfizm, X_1 - pole na M_1, $X_2 = d\varphi(X_1)$ - pole na M_2. Wówczas φ przenosi trajektorie pola X_1 na trajektorie pola X_2, tzn.

$$\varphi\left(\varphi_t^{X_1}(p)\right) = \varphi_t^{X_2}(\varphi(p)). \quad \square$$

Schemat: $\mathcal{L}_X Y = 0 \Rightarrow d\varphi_t^X(Y) = Y \Rightarrow$ φ_t^X(trajektorie Y) = trajektorie Y $\Rightarrow$ przemienność potoków.

Dowód $\Leftarrow$: $[X,Y] = 0$ na otoczeniu p, czyli $\mathcal{L}_X Y \equiv 0$ na otoczeniu p.

Oznacza to że

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (d\varphi_{-t}^X)\left(Y(\varphi_t^X(q))\right) = 0\left(\varphi_{t_0}^X(q)\right)$$

dla q bliskich p oraz t_0 bliskich 0

bo $\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (d\varphi_{-t}^X)\left(Y(\varphi_t^X(q))\right) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (d\varphi_{-t_0-s}^X)\, Y\left(\varphi_{t_0+s}^X(q)\right) =$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (d\varphi_{-t_0}^X)\, d\varphi_{-s}^X\, Y\left(\varphi_s^X(\varphi_{t_0}^X(q))\right) =$$

$$= (d\varphi_{-t_0}^X) \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (d\varphi_{-s}^X) Y\left(\varphi_s^X(\varphi_{t_0}^X(q))\right) =$$

$$= (d\varphi_{-t_0}^X)\Big[\underbrace{\mathcal{L}_X Y\left(\varphi_{t_0}^X(q)\right)}_{=0}\Big] = 0.$$

Całkując po t dostajemy $d\varphi_{-t}^X\left(Y(\varphi_t^X(q))\right) = Y(q)$ dla q bliskich p i dla małych t

Zatem dla małych t lokalny dyfeomorfizm φ_t^X przenosi pole Y na siebie, a więc trajektorie (kawałkowe) pola Y na trajektorie Y.

Mamy więc

$$\varphi_t^X\left(\varphi_s^Y(q)\right) = \varphi_s^Y\left(\varphi_t^X(q)\right)$$

dla q bliskich p, małych s, czyli potoki komutują na otoczeniu p. $\square$

Dla dowodu $\Rightarrow$ potrzebujemy pokazać

FAKT. Jeśli dyfeomorfizm φ zachowuje trajektorie pola Y, tzn. jeśli

$\varphi\left(\varphi_t^Y(q)\right) = \varphi_t^Y\left(\varphi(q)\right)$ $\forall q$, to pole Y jest φ-niezmiennicze, tzn.

$d\varphi(Y) = Y$ lub dokładniej $d\varphi\left(Y(q)\right) = Y\left(\varphi(q)\right)$ $\forall q$

lub $Y(q) = (d\varphi)^{-1}\left(Y(\varphi(q))\right)$.

SCHEMAT: potoki komutują $\Rightarrow$
$\varphi_t^X(\text{trajektorie } Y) = \text{trajektorie } Y \Rightarrow$
$d\varphi_t^X(Y) = Y \Rightarrow L_X Y = 0$.

<u>dowód $\Rightarrow$</u>: Jeśli φ_t^X, φ_s^Y komutują wokół p

to dla małych t φ_t^X przenosi małe kawałki trajektorii pola Y w pobliżu p na trajektorie pola Y:

$$\varphi_t^X\left(\varphi_s^Y(q)\right) = \varphi_s^Y\left(\varphi_t^X(q)\right)$$

dla s w pobliżu 0 i q bliskich p

Oznacza to, dzięki FAKTOWI, że

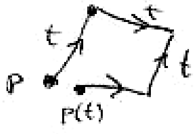
$$\left(d\varphi_t^X\right) Y(q) = Y\left(\varphi_t^X(q)\right) \quad \text{czyli}$$

$$Y(q) = \left(d\varphi_{-t}^X\right) Y\left(\varphi_t^X(q)\right)$$

A więc $\mathcal{L}_X Y(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(d\varphi_{-t}^X\right) Y\left(\varphi_t^X(q)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(q) = 0$. $\square$

UWAGA: Interpretacja komutatora jako

inaczej: $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p(t) = 0$, $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} p(t) = [X,Y]$



$[X,Y] = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} p(\sqrt{s})$

WYPROSTOWANIE KOMUTUJĄCYCH liniowo niezależnych PÓL WEKTOROWYCH

Tw. $X_1, \dots, X_k$ pola wektorowe na M, $\dim M = m \geq k$,

Zał. że na otoczeniu punktu $p \in M$ pola X_i

- parami komutują, tzn. $[X_i, X_j](q) = 0$
- są liniowo niezależne, tzn. układ $X_1(q), \dots, X_k(q)$ wektorów jest liniowo niezależny w T_qM.

Wówczas istnieje mapa φ wokół p, w której pola X_i mają postać

$$X_i(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{dla } i = 1, \dots, k.$$

<u>dowód</u>: ponieważ wszystko jest lokalnie wokół p, ~~możemy~~ przyjmujemy że

$M = \mathbb{R}^m$, $p = (0, \dots, 0)$, $X_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} (X_i)_j(\bar{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Ponieważ $X_1(p), \dots, X_k(p)$ liniowo niezależne, więc macierz

$$\begin{pmatrix} (X_1)_1 & (X_2)_1 & \cdots & (X_k)_1 \\ (X_1)_2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ (X_1)_m & & & (X_k)_m \end{pmatrix} \quad \text{ma rząd } k$$

Przyjmijmy, że wiersze od 1 do k tworzą macierz nieosobliwą (przenumerowując współrzędne jeśli trzeba).

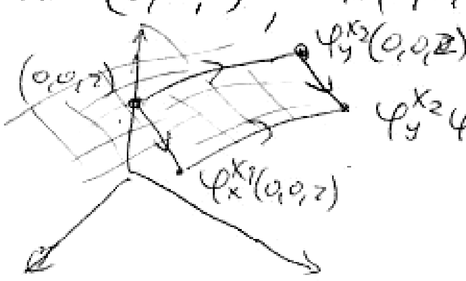
Rozważmy odwzorowanie:

$$\lambda(t_1, \dots, t_m) = \varphi_{t_1}^{X_1} \circ \varphi_{t_2}^{X_2} \circ \dots \circ \varphi_{t_k}^{X_k}(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_m)$$

λ - gładkie, określone na otoczeniu $(0, \dots, 0)$, $\lambda(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0) = p$.

Np. gdy $k=2$, $m=3$,

$\lambda(x, y, z) = \varphi_x^{X_1} \varphi_y^{X_2}(0,0,z)$



$\varphi_y^{X_2} \varphi_x^{X_1}(0,0,z) = \varphi_x^{X_1} \varphi_y^{X_2}(0,0,z)$

Obliczmy dla $i=1,\dots,k$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t_i}(t_1,\dots,t_n) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi^{X_1}_{t_1}\circ\dots\circ\varphi^{X_i}_{t_i+s}\circ\dots\circ\varphi^{X_k}_{t_k}(0,\dots,0,t_{k+1},\dots,t_m) =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi^{X_i}_{t_i+s}\circ\varphi^{X_1}_{t_1}\circ\dots \overset{i}{\wedge} \circ\varphi^{X_k}_{t_k}(0,\dots,0,t_{k+1},\dots,t_m) =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi^{X_i}_{s}\left(\varphi^{X_1}_{t_1}\circ\dots\circ\varphi^{X_i}_{t_i}\circ\dots\circ\varphi^{X_k}_{t_k}(0,\dots,0,t_{k+1},\dots,t_m)\right) =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi^{X_i}_{s}\left(\lambda(t_1,\dots,t_m)\right) = X_i(\lambda(t_1\dots t_m))$$

$$D\lambda(0) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} (X_1)_1 & \dots & (X_k)_1 & & & \\ & & & & 0 & \\ (X_1)_k & & (X_k)_k & & & \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & & & & 1 & \\ (X_1)_m & & (X_k)_m & 0 & & 1 \end{array}\right]$$

bo $\lambda(0,\dots,0,t_{k+1},\dots,t_n) = (0,\dots,0,t_{k+1},\dots,t_n)$

$D\lambda(0)$ – nieosobliwa, więc λ – dyfeomorfizm na otoczeniu 0

Ponieważ $d\lambda\left(\frac{\partial}{\partial t_i}(t_1,\dots,t_n)\right) = \frac{\partial\lambda}{\partial t_i}(t_1,\dots,t_n) = X_i(\lambda(t_1\dots t_n))$, więc dla map. $\varphi = \lambda^{-1}$ mamy $d\varphi(X_i(\lambda(\bar t))) = \frac{\partial}{\partial t_i}(\bar t)$, czyli $X_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$ w tej mapie.

$\square$