DYSKRETNE ILORAZY ROZMAITOŚCI PRZEZ GRUPY DYFEOMORFIZMÓW

M – gładka rozmaitość

<u>Def.</u> Grupa G dyfeomorfizmów M to zbiór dyfeomorfizmów $g: M \to M$ zamknięty na składanie i branie odwrotności.

UWAGI. Wtedy (automatycznie) $id_M \in G$, oraz G staje się grupą względem działania składania (id_M jest elementem neutralnym). Mówi się też (wtedy) że <u>grupa G działa na M przez dyfeomorfizmy</u>.

<u>Def.</u> <u>Orbitą</u> punktu $x \in M$ względem działania G na M nazywamy zbiór $G(x) = \{g(x) : g \in G\}$.

UWAGI. Orbity $G(x), G(y)$ są albo rozłączne, albo się pokrywają. Rodzina wszystkich orbit stanowi <u>rozbicie</u> rozmaitości M na podzbiory.

<u>Def</u> M/G to <u>przestrzeń ilorazowa działania G na M</u>, czyli przestrzeń, której punktami są orbity $G(x): x \in M$, zaś topologia jest ilorazowa, tzn. zbiór orbit jest otwarty w M/G $\iff$ suma tych orbit stanowi otwarty podzbiór M.

Np. jeśli ~~B jest bazą topologii w M~~ $U \subset M$ jest otwarty, ~~to rodzina~~ to $G(U)/G = \{G(x) : x \in U\}$ jest otwarty w M/G, i każdy zbiór otwarty w M/G jest tej postaci.
Jeśli B jest bazą topologii w M, to rodzina

$$\{G(U)/G : U \in B\}$$ jest bazą topologii w M/G [ćw].

Stąd M/G zawsze posiada przeliczalną bazę topologii (bo M posiada).

Chcemy, by M/G było rozmaitością tego samego wymiaru co M

Lokalną euklidesowość ilorazu M/G zapewnia np. ~~...~~ następujący warunek na G:

(działanie nakrywające)

$\forall p \in M$ $\exists$ otwarte otoczenie U punktu p t.że

zbiory z rodziny $g(U) : g \in G$ są parami rozłączne.
$(g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$ dla $g_1 \neq g_2)$.

Wtedy ~~...~~ otwarty podzbiór $G(U)/G \subset M/G$ jest homeomorficzny z U otoczeniem orbity $G(p)$.

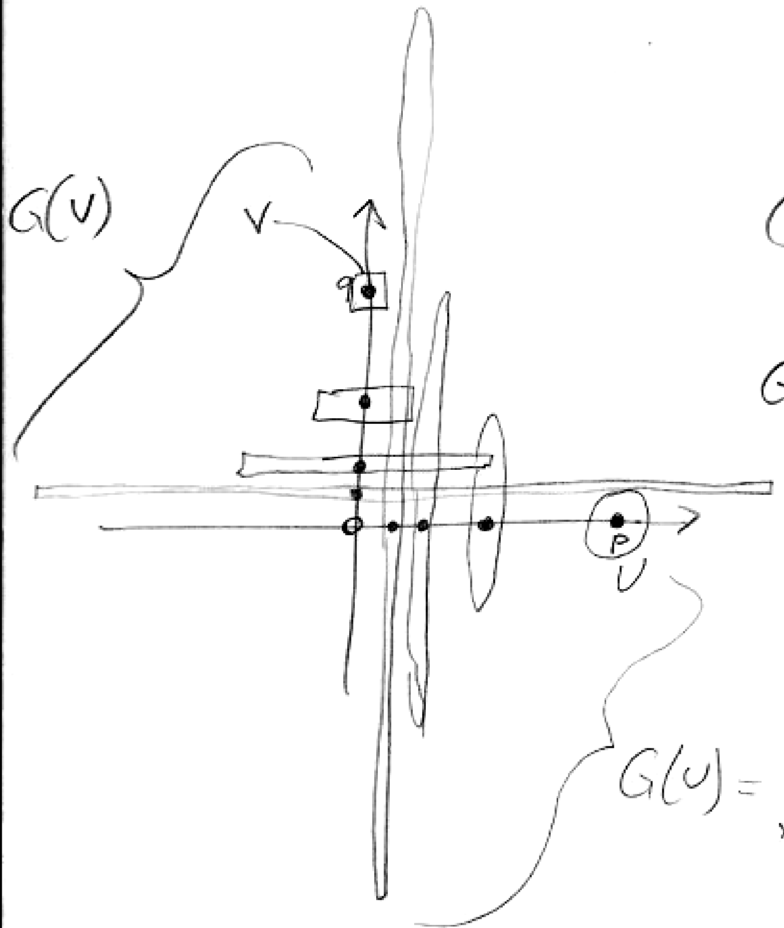
Ponieważ U w definicji działania nakrywającego zawsze możemy zmniejszyć do U euklidesowego (homeo z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$), oznacza to lokalną euklidesowość ilorazu M/G.

FAKT. Jeśli działanie grupy G przez ~~...~~ homeomorfizmy na rozmaitości M jest nakrywające, to iloraz M/G jest lokalnie euklidesowy (dla wymiaru $n = \dim M$).

PRZYKŁAD. Działanie gpy $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ przez potęgi przekształcenia liniowego zadanego macierzą $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ jest nakrywające.
Zatem iloraz $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) / \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$ jest lokalnie euklidesowy wymiaru 2

JEDNAK, iloraz ten nie jest przestrzenią Hausdorffa <u>VERTE</u>

Zatem działanie w sposób nakrywający nie wystarcza do tego by iloraz M/G było rozmaitością. ~~...~~



$G(U) \cap G(V) \neq \emptyset$

stąd też

$G(U)/G \cap G(V)/G \neq \emptyset$

orbit $G(p)$ i $G(q)$
nie da się oddzielić w M/G
zbiorami otwartymi

$G(U) = \bigcup_{x \in U} G(x)$

[redacted]

Def Działanie G na M przez dyfeo jest

(1) <u>wolne</u>, gdy $\forall g \in G \setminus \{id\}\ \forall x \in M \quad g(x) \neq x$

(2) <u>właściwie nieciągłe</u> (properly discontinuous), gdy

$\forall K \subset M$ zwartego, zbiór $\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony.

UWAGI

Dla $x \in M$, stabilizator (podgrupa stabilizująca) punktu x względem G, to

$Stab(x) := \{g \in G : g(x) = x\}$ – jest to automatycznie podgrupa.

FAKT. Działanie G jest wolne $\Leftrightarrow$ wszystkie stabilizatory $Stab(x)$ są trywialne $(= \{id_M\})$.

PRZYKŁAD. Działanie grupy $\mathbb{Z}_n$ na $\mathbb{R}^2$ przez potęgi obrotu o kąt $2\pi/n$ nie jest wolne

FAKT. Działanie G jest wolne $\Leftrightarrow$ $\forall x \in M$ odwzorowanie $G \to G(x)$ zadane przez $g \mapsto g(x)$ jest bijekcją.

FAKT. Gdy działanie G ~~jest wolne~~ przez homeo na przestrzeni topologicznej lokalnie zwartej X jest właściwie nieciągłe, to każda orbita $G(x)$ jest dyskretnym podzbiorem w X (tzn. każdy $z \in G(x)$ ma otwarte otoczenie U t.że $U \cap G(x) = \{z\}$).

~~Ponadto~~, Jeśli działanie ~~jest ponadto wolne, to jest~~ G na X jest właściwie nieciągłe i wolne, to jest automatycznie nakrywające.

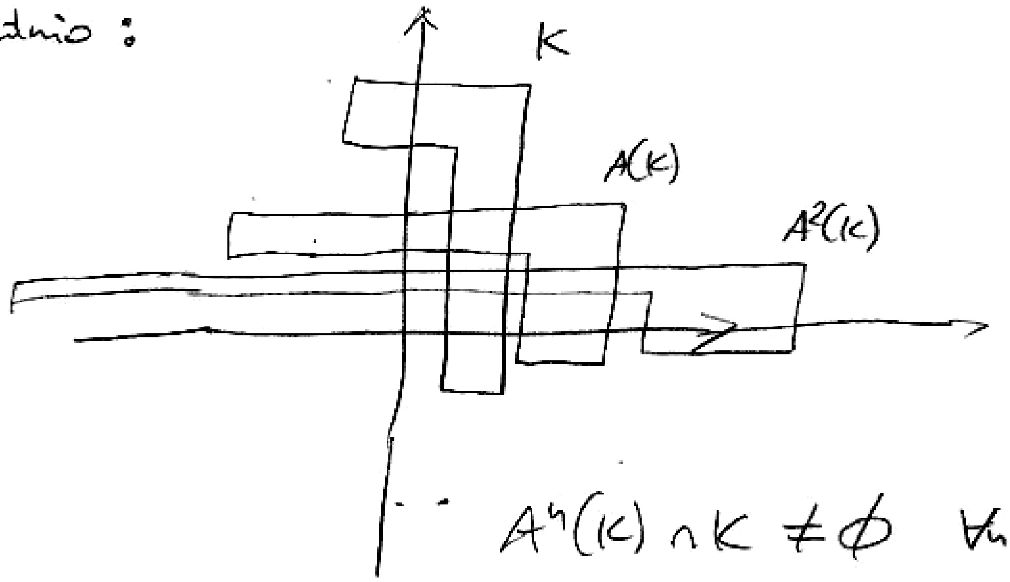
FAKT (WAŻNY!). Jeśli G działa przez homeo na przestrzeni ~~Hausdorffa~~ lokalnie zwartej X w sposób właściwie nieciągły, to iloraz X/G jest przestrzenią Hausdorffa. □

VERTE $\longrightarrow$ PRZYKŁADY

PRZYKŁADY

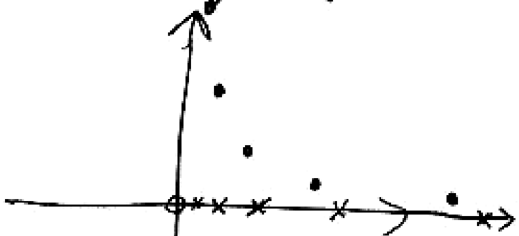
(1) Działanie grupy $\mathbb{Z}$ na S^1 przez potęgi obrotu o kąt α niewspółmierny z 2π jest wolne, ale ma orbity gęste w S^1 [a więc nie dyskretne].
Zatem działanie nie jest ani właściwie nieciągłe, ani wolne.
Iloraz $S^1/\mathbb{Z}$ jest wtedy przestrzenią z topologią trywialną. (więc nie jest rozmaitością).

(2) Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ przez potęgi $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ nie może być właściwie nieciągłe. Można to zobaczyć bezpośrednio:



$A^n(K) \cap K \neq \emptyset \quad \forall n \geq 1$

Ale UWAGA, to działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ jest wolne i ma dyskretne orbity.



Zatem warunek, by działanie było wolne i miało dyskretne orbity nie wystarcza do tego by iloraz był rozmaitością — nawet nie musi być przestrzenią Hausdorffa.

7 2017

Podsumowanie dotychczasowego:

~~FAKT~~ FAKT. Jeśli G działa na M^n przez dyfeomorfizmy, w sposób wolny i właściwie nieciągły, to iloraz M/G jest • lokalnie euklidesowy n-wymiarowy, • Hausdorffa, • ma przeliczalną bazę. Zatem M/G jest n-wymiarową rozmaitością topologiczną.

GŁADKI ATLAS NA M/G

8 2017

Niech $U \subset M$ spełnia warunek

(*) ~~które podzbiory z rodziny $g(U) : g \in G$ są parami rozłączne~~. U jest otwarty oraz
$\forall g_1, g_2 \in G,\ g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$.

~~Przypomnijmy, że to~~

Zauważmy, że każdy $p \in M$ ma otoczenie U spełniające (*)

a zatem każda orbita $G(p) \in M/G$ ma otoczenie

postaci $G(U)/G$ ze zbiorem U spełniającym (*).

Zauważmy też, że ~~odwzorowanie~~ dla U spełniającego (*)

odwzorowanie $i_U : U \to G(U)/G$, $p \mapsto G(p)$ jest wtedy homeomorfizmem

Niech $\varphi : U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ będzie mapą z atlasu $\mathcal{A}$

struktury gładkiej rozmaitości M.

Wtedy $\varphi_G : G(U)/G \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$

określone przez $\varphi_G = \varphi \circ i_U^{-1}$

jest dobrym kandydatem na mapę dla M/G.

Rozważmy rodzinę

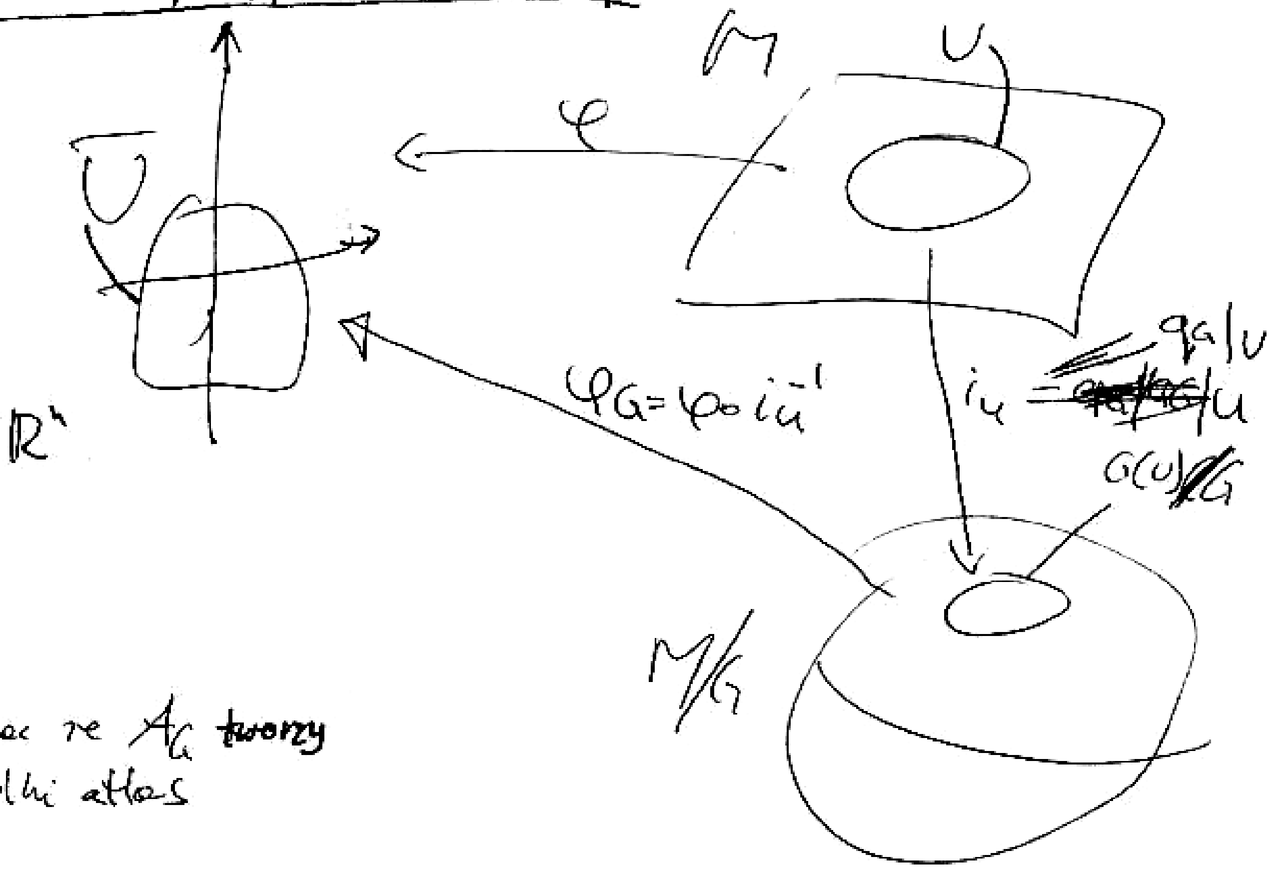
$$\mathcal{A}_G := \{ (G(U)/G, \varphi_G) : U \text{ spełnia (*) oraz } (U, \varphi) \in \mathcal{A} \}.$$

~~Pokażemy, że~~ Wówczas

- $\mathcal{A}_G$ jest gładko zgodny, więc jest gładkim atlasem na M/G
- odwzorowanie ilorazowe $q_G : M \to M/G$ zadane przez $q_G(x) = G(x) \in M/G$ jest gładkie, i jest lokalnym dyfeomorfizmem.

[dowody pomijam]

Dowód lokalnej dyfeomorficzności q_G:



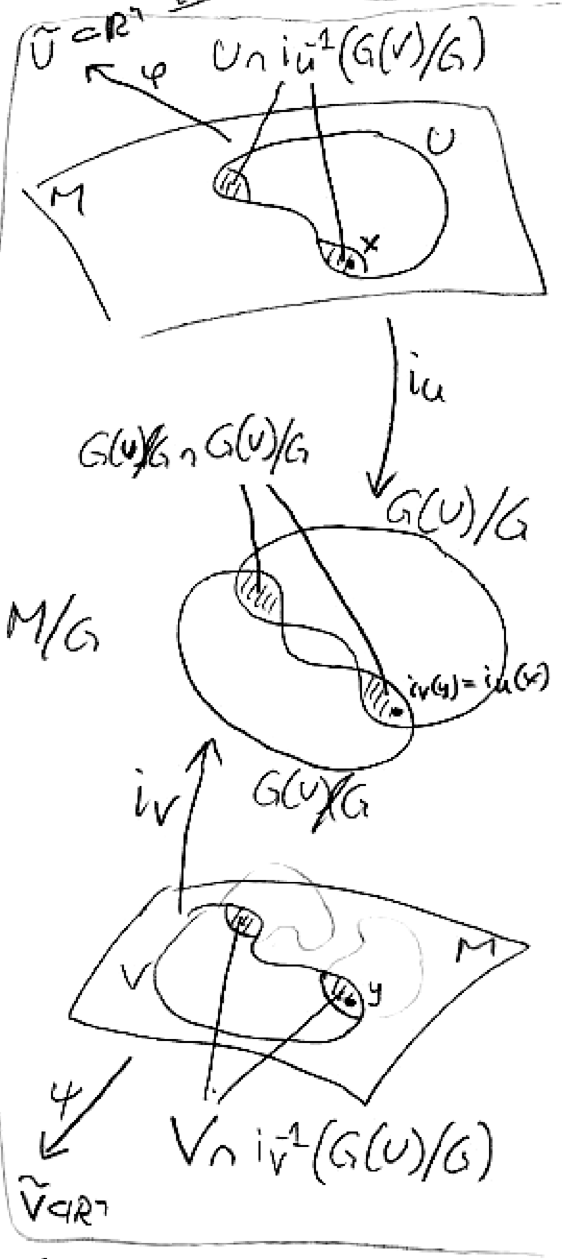
Zakładając że A_G tworzy gładki atlas

Pokażemy że q_G obcięty do dowolnego otwartego U spełniającego (*) jest dyfeomorfizmem na otw. podzbiór w M/G

$$\varphi_G \circ q_G \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ i_u^{-1} \cdot i_u \circ \varphi^{-1} = id_{\overline{U}}$$

stąd lokalna dyfeomorficzność $q_G : M \to M/G$.

GŁADKA ZGODNOŚĆ



- mapy $(G(U)/G, \varphi_G)$ oraz $(G(V)/G, \psi_G)$ związane z mapami (U,φ) oraz (V,ψ) na zbiorach $U, V \subset M$ spełniających (*).

- mamy odwzorowanie przejścia

$$\psi_G \circ \varphi_G^{-1} : \varphi_G\left(G(U)/G \cap G(V)/G\right) \to$$

$$\to \psi_G\left(G(U)/G \cap G(V)/G\right)$$

i zachodzi

$$\psi_G \circ \varphi_G^{-1} = \psi \circ i_V^{-1} \circ \left[\varphi \circ i_U^{-1}\right]^{-1} =$$

$$= \psi \circ i_V^{-1} i_U \circ \varphi^{-1}$$

Przyglądniemy się złożeniu $\cancel{i_V^{-1} \circ i_U}$

$$i_V^{-1} \circ i_U : U \cap i_U^{-1}(G(V)/G) \to V \cap i_V^{-1}(G(U)/G)$$

które jest homeomorfizmem otwartych podzbiorów w M.

- dla $y = i_V^{-1} i_U(x)$ mamy $\underset{G(x)}{\overset{}{i_U(x)}} = \underset{G(y)}{i_V(y)}$

Zatem x i y są w tej samej orbicie działania G, czyli

$y = g_x(x)$ dla pewnego $g_x \in G$;

Z ciągłości $i_V^{-1} \circ i_U$, przyporządkowanie $x \mapsto g_x$ musi być stałe na komponentach spójności (bo inaczej obraz spójnej komponenty przez ciągłe $i_V^{-1} \circ i_U$, przeciąłby zbiory $g(U)$ dla kilku różnych g, a ponieważ te ostatnie są parami rozłączne, więc obraz ten nie byłby spójny, co jest niemożliwe

VERTE →

• Komponenty spójności $U \cap i_U^{-1}(G(V)/G)$ są otwarte w M

Na każdej takiej komponencie W mamy $i_V^{-1} \circ i_U(x) = g(x)$

dla ustalonego g (dla wszystkich komponent mogą to być różne g).

Zatem $\cancel{\text{...}}$ $\psi_G \circ \varphi_G^{-1} = \psi\, i_V^{-1} i_U\, \varphi^{-1}$ jest zadane

na $\varphi(W)$ wzorem

$$\psi_G \circ \varphi_G^{-1}(x) = \psi \circ g \circ \varphi^{-1}(x)$$

Ale $\psi g \varphi^{-1}$ to wyrażenie dyfeomorfizmu g w mapach φ i ψ,

więc jest gładkie.

Oznacza to, że $\psi_G \circ \varphi_G^{-1}$ jest gładkie na każdej komponencie

spójności dziedziny, czyli jest gładkie $\square$

8 ~~stare~~

PRZYKŁADY DZIAŁAŃ (WOLNYCH I WŁAŚCIWIE NIECIĄGŁYCH) ~~NIECIĄGŁYCH~~ ~~GRUP~~ PRZEZ DYFEOMORFIZMY

~~$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$~~

10 / 2017 OBECNIE

1. $\mathbb{Z}^n$ na $\mathbb{R}^n$ przez przesunięcia. $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$ – n-wymiarowy torus

2. $\mathbb{Z}$ działa na produkcie $S^1\times\mathbb{R}$ (współrzędne θ na S^1, t na $\mathbb{R}$)

$k\in\mathbb{Z}$ działa przez $k\cdot(\theta,t) = ((-1)^k\theta, t+k)$

[przesunięcie z odpowiednią potęgą odbicia]

iloraz jest tzw. butelką Kleina

~~2'. $\mathbb{Z}$ działa na $\mathbb{R}^2$ przez $k\cdot(x,y) = ((-1)^k x, y+k)$~~

UWAGA. Iloraz M/G dla wolnego i właściwie nieciągłego działania grupy dyfeomorfizmów G na rozmaitości M z brzegiem jest rozmaitością z brzegiem

3. $\mathbb{Z}$ działa na $[-1,1]\times\mathbb{R}$ przez $k\cdot(x,y) = ((-1)^k x, y+k)$

iloraz $[-1,1]\times\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ jest wstęgą Möbiusa (domknięta, tzn. z brzegiem)

4. $Conf_n(M)$ – przestrzeń konfiguracyjna n-elementowych podzbiorów gładkiej rozmaitości M (bez brzegu).

Wyrazimy $Conf_n(M)$ jako iloraz działania nieciągłej grupy dyfeo.

Rozważmy produkt ~~M~~ $\underbrace{M\times\dots\times M}_{n}$ oraz (tzw. uogólnioną) przekątną $\Delta^n(M)$

złożoną z punktów $(x_1,\dots,x_n)\in M\times\dots\times M$ takich, że $x_i=x_j$ dla jakichkolwiek $i\neq j$. (tzn. $x_1,\dots,x_n$ nie są parami różne).

- $\Delta^n(M)$ domknięty w $M\times\dots\times M$
- $M\times\dots\times M\setminus\Delta^n(M)$ otwarty, składa się z $(x_1,\dots,x_n)$: x_i są parami różne
- grupa permutacji S_n działa na $M\times\dots\times M\setminus\Delta^n(M)$ przez

VERTE →

$\sigma(x_1,\dots,x_n) = (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$; $(M\times\dots\times M\setminus\Delta^n(M))/S_n = Conf_n(M)$