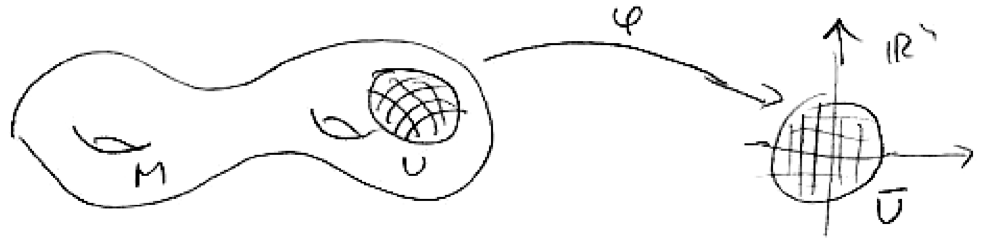
JESZCZE KILKA UWAG:

(1) W dalszej części rozważań będziemy niekiedy utożsamiać mapowe otoczenie $U \subset M$ z obrazem przez mapę, czyli z $\bar{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Można o tym myśleć, że przenosimy siatkę współrzędnych $(x_1, \dots, x_n)$ z $\bar{U}$ przez φ^{-1} na $U \subset M$



O punkcie p takim że $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_n)$ będziemy mówić że w mapie $p = (x_1, \dots x_n)$.

(2) Za pomocą translacji współrzędnych zawsze możemy przyjąć że $p = (0, \dots, 0)$ w mapie, czyli możemy założyć że (U, φ) jest mapą o początku w (wokół) p.

(3) Często będziemy przechodzić do mniejszych zbiorów mapowych, za mapę biorąc odwzorowanie obcięte. ~~Będziemy wtedy mów.~~ (jest to mapa zgodna z atlasem!). Będziemy wtedy mówić, że przyjmujemy że mapa (U, φ) wokół p ma zbiór mapowy U taki mały jak akurat potrzeba [zmniejszanie mapy].

(np. że jest rozłączny z pewnym zbiorem domkniętym $F \subset M$ nie zawierającym p).

[redacted] [redacted]

RÓŻNICZKOWALNOŚĆ ODWZOROWAŃ ROZMAITOŚCI

M, N gładkie rozmaitości

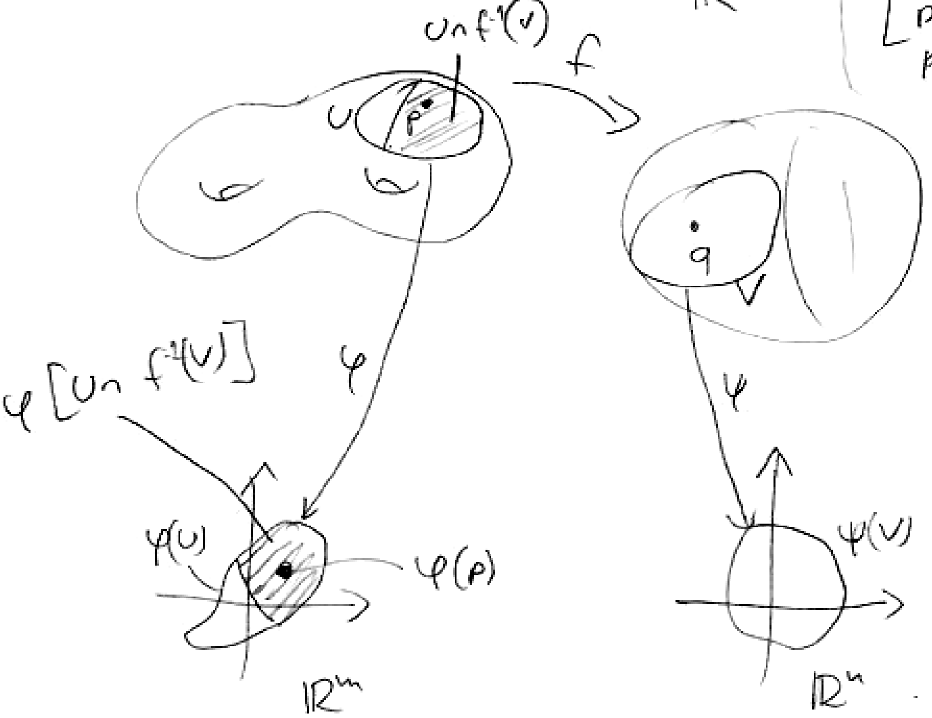
$f: M \to N$ ciągłe odwzor., $p \in M$, $f(p) = q \in N$

DEF. (1) f jest C^r-różniczkowalne w punkcie p (dla $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) jeśli dla dowolnych map (U,φ) wokół p, (V,ψ) wokół q złożenie

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{\varphi[U \cap f^{-1}(V)]}} \to \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\psi(V)}}$$

jest C^r-różniczkowalne w punkcie $\varphi(p)$

[posiada w tym punkcie wszystkie pochodne cząstkowe rzędów $\leq r$]



UWAGA:
$\varphi[U \cap f^{-1}(V)]$ jest otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^m$

DEF. (2) f jest C^r na otoczeniu p, jeśli (dla dowolnych map $(U,\varphi)(V,\psi)$ j.w.) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ posiada pochodne cząstkowe rzędów $\leq r$ na pewnym otwartym otoczeniu $\varphi(p)$ i są one ciągłe.

TERMINOLOGIA: $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ nazywamy <u>wyrażeniem</u> f w <u>mapach</u> $(U,\varphi), (V,\psi)$, lub wyrażeniem f w lokalnych współrzędnych zadanych przez te mapy.

2 | 2010

[skorygowane strona]

FAKT 1. Jeśli f wyrażone w mapach $(U,\varphi)(V,\psi)$ jest C^r-różniczkowalne w punkcie $\varphi(p)$, to wyrażone w innych mapach $(U',\varphi')(V',\psi')$ wokół p,q [gładko zgodnych z poprz.] jest C^r-różniczkowalne w punkcie $\varphi'(p)$. Zatem C^r-różniczkowalność funkcji f w punkcie $p \in M$ wystarczy sprawdzić dla jednej pary map wokół p i q.

FAKT 1'. To samo jest prawdą dla C^r różniczkowalności na otoczeniach punktów $\varphi(p)$, $\varphi'(p)$, p odpowiednio.

Dowód: Niech $\hat{f} = \psi f \varphi^{-1}$, $\hat{\hat{f}} = \psi' f (\varphi')^{-1}$

Niech $\underbrace{\varphi(\varphi')^{-1}}_{= \alpha}$ oraz $\underbrace{\psi'\psi^{-1}}_{= \beta}$ będą odwzorowaniami przejścia

(są to dyfeomorfizmy gładkie pomiędzy odp. otwartymi podzbiorami z $\mathbb{R}^m$ oraz z $\mathbb{R}^n$, odpowiednio)

Zachodzi

$\hat{\hat{f}} = \beta \circ \hat{f} \circ \alpha$ [bo $\beta \hat{f} \alpha = \psi' \cancel{\psi^{-1}} \cdot \cancel{\psi} f \cancel{\varphi^{-1}} \cdot \cancel{\varphi} (\varphi')^{-1} = \psi' f (\varphi')^{-1} = \hat{\hat{f}}$]

gdzie • obie strony są określone na pewnych otwartych podzb. w $\mathbb{R}^m$ zawierających punkt $\varphi'(p)$, zaś równość zachodzi na ich przecięciu

• $\alpha(\varphi'(p)) = \varphi(p)$ [z def. α]

Zatem, jeśli $\hat{f}$ jest C^r w punkcie $\varphi(p)$ to $\hat{\hat{f}}$ jest C^r w punkcie $\varphi'(p)$.

Podobnie, jeśli $\hat{f}$ jest C^r na otoczeniu $\varphi(p)$, to $\hat{\hat{f}}$ jest C^r na otoczeniu $\varphi'(p)$. □

VERTE →

DEF. $f: M \to N$ jest C^r-różniczkowalne jeśli jest C^r-różniczkowalne na otoczeniu dowolnego $p \in M$.

UWAGI:

1) $f: M \to N$ jest C^r-różniczkowalne $\iff$ dla dowolnych map (U, φ) w M oraz (V, ψ) w N wyrażenie $\psi f \varphi^{-1}$ funkcji f w tych mapach jest C^r-różniczkowalne na całym zbiorze, na którym jest określone.

2) Dzięki faktowi 1', C^r-różniczkowalność f wystarczy zweryfikować dla par map z dowolnych wybranych atlasów na M i N, w sensie spełniania warunku jak w 1.

FAKT 2. Złożenie gładkich odwzorowań pomiędzy rozmaitościami jest gładkie.

Dowód: Niech $f: M \to N$, $g: N \to P$ gładkie.

Niech $p \in M$, $q = f(p) \in N$, $s = g(q) = g \circ f(p) \in P$.

Niech (U,φ) (V,ψ) (W,ξ) mapy wokół p, q, s.

Wiemy, że $\psi f \varphi^{-1}$ oraz $\xi g \psi^{-1}$ są gładkie ~~w ψ(p), ψ(q)~~ odp.

Pytamy, czy $\xi \circ (g \circ f) \varphi^{-1}$ jest gładkie, na otoczeniu $\varphi(p)$.

Ale (istnieje otoczenie $\varphi(p)$ na którym zachodzi równość) $\xi (g \circ f) \varphi^{-1} = (\xi g \psi^{-1})(\psi f \varphi^{-1})$; złożenie odwzorowań gładkich. ~~więc jest gładkie.~~ □

Stąd $g \circ f$ jest gładkie na otoczeniu każdego punktu $p \in M$, (~~tam gdzie określone~~) więc jest gładkie. □

Nie tylko różniczkowalność, ale także pewne związane z nią parametry są dobrze określone dla odwzorowań rozmaitości.

Def. Rzędem $f: M \to N$ C^1-różniczkowalnego w punkcie $p \in M$ nazywamy rząd macierzy pierwszych pochodnych cząstkowych odwzorowania $\psi f \varphi^{-1}$ w $\varphi(p)$.

FAKT 3. Powyższa liczba nie zależy od wyboru map wokół p i $f(p)$.
[ĆW]

WNIOSEK. Zerowanie się pierwszej pochodnej (w punkcie) (rząd $= 0$) jest dobrze określonym pojęciem dla odwzorowań rozmaitości gładkich. VERTE DÓŁ →

Def. Gładkie odwzorowanie $f: M \to N$ jest dyfeomorfizmem jeśli jest wzajemnie jednoznaczne, zaś odwzorowanie odwrotne $f^{-1}: N \to M$ jest też gładkie.

Rozmaitości gładkie M, N są dyfeomorficzne jeśli istnieje dyfeomorfizm pomiędzy nimi.

UWAGA. Rozmaitości dyfeomorficzne są nierozróżnialne jako gładkie rozmaitości. | dyfeo — jak homeo w topologii, jak izomorfizm w algebrze

VERTE →

UWAGA.

Pojęcia odwzorowań gładkich, różniczkowalności w punkcie, dyfeomorfizmu, rzędu odwzorowania w punkcie, i ich własności, bez zmian przenoszą się na rozmaitości gładkie z brzegiem.

DOD:

- porównujemy rząd macierzy jakobianu $\hat{f} = \psi f \varphi^{-1}$ oraz $\hat{\hat{f}} = \psi' f (\varphi')^{-1}$; związek pomiędzy nimi to $\hat{\hat{f}} = \beta \hat{f} \alpha$, gdzie α i β to odpowiednie odwzorowania przejścia
- macierz jakobianu złożenia to iloczyn macierzy jakobianu funkcji składowych
- macierz jakobianu odwzorowań przejścia jest nieosobliwa
- domnożenie macierzy, z dowolnej strony, przez macierz nieosobliwą nie zmienia rzędu!

$\square$

DYCHOTOMIA C^0 i $C^k, k>0$ — DYGRESJA

- Z każdego maksymalnego atlasu C^1-rozmaitości można wybrać atlas złożony z map C^∞-zgodnych. Zatem, każda C^1-rozmaitość posiada C^1-zgodną strukturę C^∞-rozmaitości. [Whitney ~1940]

- Istnieją C^0-rozmaitości (rozmaitości topologiczne) nie dopuszczające żadnej zgodnej struktury gładkiej. [Quinn '82, Friedman '82]

DYGRESJA o dyfeo.

3 dod

(1) ~~Porządne porządkowanie~~ C^1 versus C^∞.

Poprzednio: Każda C^1-rozmaitość posiada C^1-zgodną strukturę C^∞

Teraz: ~~Każdy C^1 dyfeo porządny C^∞~~ Jeśli dwie C^∞-rozmaitości są C^1 dyfeomorficzne, to są też C^∞ dyfeomorficzne

Stąd: Klasyfikacja C^1-rozm. z dokł. do C^1 dyfeo jest taka sama jak klasyfikacja C^∞-rozm z dokł do C^∞-dyfeo.

(2) C^0 versus C^∞

Poprzednio: istnieją C^0-rozmaitości nie posiadające żadnej zgodnej C^∞-struktury

Teraz: istnieją C^0-rozmaitości posiadające wiele ~~różnych~~ zgodnych a parami nie dyfeomorficznych C^∞-struktur

- [Milnor '56] - sfery S^n, $n \geq 7$, skończenie wiele (>1) takich struktur.
- [Freedman '82, Donaldson '83] - ~~na~~ $\mathbb{R}^4$, nieprzeliczalnie wiele takich struktur
- ~~Ale~~ W wymiarach ≤ 3 związek pomiędzy C^0 a C^∞ jest taki jak pomiędzy C^1 a C^∞ w punkcie (1) (więc np. klasyfikacja 3-wym. rozm. top. z dokł. do homeo jest taka sama jak klasyfikacja 3-wym. rozm. gładkich z dokładnością do dyfeo.)

KLEJENIE ROZMAITOŚCI WZDŁUŻ KOMPONENT BRZEGU. SKLEJANIE 2010

A

• Otoczenie kołnierzowe

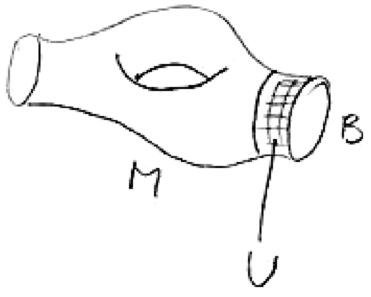
M – gładka n-wym. rozmaitość, B – komponenta brzegu ∂M

TWIERDZENIE.
Istnieje dyfeomorficzne włożenie (czyli dyfeomorfizm na obraz)

$k : B \times [0,1) \to M$, na otwarte otoczenie U komponenty B w M,

takie że $k(x,0) = x$ dla $x \in B$.

dowód – ze kilku wykładów,
technika potoków pól wektorowych



• M_1, B_1 oraz M_2, B_2 j.w.

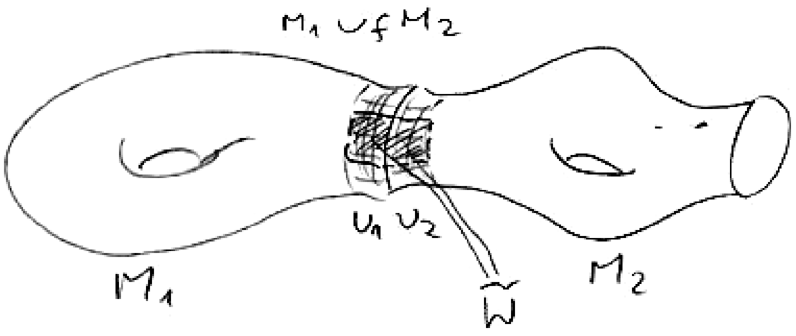
$f : B_1 \to B_2$ dyfeomorfizm

$M_1 \cup_f M_2 = M_1 \sqcup M_2 / \sim$ gdzie $\underset{B_1}{\overset{\Uparrow}{x}} \sim \underset{B_2}{\overset{\Uparrow}{f(x)}}$

Zaś pozostałe klasy abstrakcji 1-elementowe

• struktura gładka na $M_1 \cup_f M_2$

$k_i : B_1 \times [0,1) \to M_i$ – otoczenie kołnierzowe



zbiory U_i utożsamiamy z produktem $B_i \times [0,1)$ via k_i

3 rodzaje map

(1) dla dowolnej mapy (U, φ) na M_1 rozważmy jej obcięcie do $U \setminus B_1$

(2) — // — M_2 — // — $U \setminus B_2$

(3) dla dowolnej mapy (W, ψ) na B_1, $\psi : W \to \widetilde{W} \subset \mathbb{R}^{n-1}$,

rozważmy otwarty zbiór $W \times [0,1) \cup_{f|_W} f(W) \times [0,1) = \widetilde{W} \subset M_1 \cup_f M_2$

VERTE →

oraz mapa $\tilde{\varphi} : \tilde{W} \to \overline{\widetilde{W}} \subset \mathbb{R}^n$

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \begin{cases} (\varphi(x), -t) & \text{dla } (x,t) \in U_1 \\ (\varphi f^{-1}(x), t) & \text{dla } (x,t) \in U_2 \end{cases}$$

- $\tilde{\varphi}(x,0) = \tilde{\varphi}(f(x), 0)$ dla $x \in W$

  więc $\tilde{\varphi}$ dobrze określone w punktach sklejenia.

- $\overline{\widetilde{W}} = \overline{W} \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $\overline{W} \subset \mathbb{R}^{n-1}$

  zaś $\tilde{\varphi} : \tilde{W} \to \overline{\widetilde{W}}$ jest homeomorfizmem

- pomijam sprawdzenie gładkiej zgodności map (1) (2) (3).

UWAGI. $M_1 \cup_f M_2$ jako rozmaitość gładka wydaje się zależeć nie tylko od f, ale też od wyboru obroży kołnierzowych. K_i kołnierz brzegów B_i.

W istocie jednak, $M_1 \cup_f M_2$ z dokł. do dyfeomorfizmu nie zależy od wyboru K_i, bo

FAKTY (1) [ŁATWY, ĆW.] Jeśli K_1, K_1' podobnie położone w M_1, tzn. $\exists h : M_1 \to M_1$ dyfeo t.że: $K_1'|_{B_1 \times [0,\frac{1}{2})} = h \circ K_1|_{B_1 \times [0,\frac{1}{2})}$

to $M_1 \cup_{f,K_1,K_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f,K_1',K_2} M_2$

[i analogicznie dla K_2, K_2'].

(2) Każde 2 otoczenia kołnierzowe brzegu B_1 brzegu ∂M_1 są podobnie położone [TRUDNE].

Ponadto

FAKT 3. (~~[illegible]~~) Ustalmy otoczenia kołnierzowe K_1, K_2.

Jeśli $f_0, f_1 : B_1 \to B_2$ izotopijne dyfeomorfizmy [czyli t.że istnieje gładka deformacja $F : [0,1] \times B_1 \to B_2$, F_t dyfeo, $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$]

to $M_1 \cup_{f_0,K_1,K_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f_1,K_1,K_2} M_2$ [Łatwe – ~~[illegible]~~ ĆW]

Suma spójna rozmaitości

M_1, M_2 - rozmaitości wymiaru n

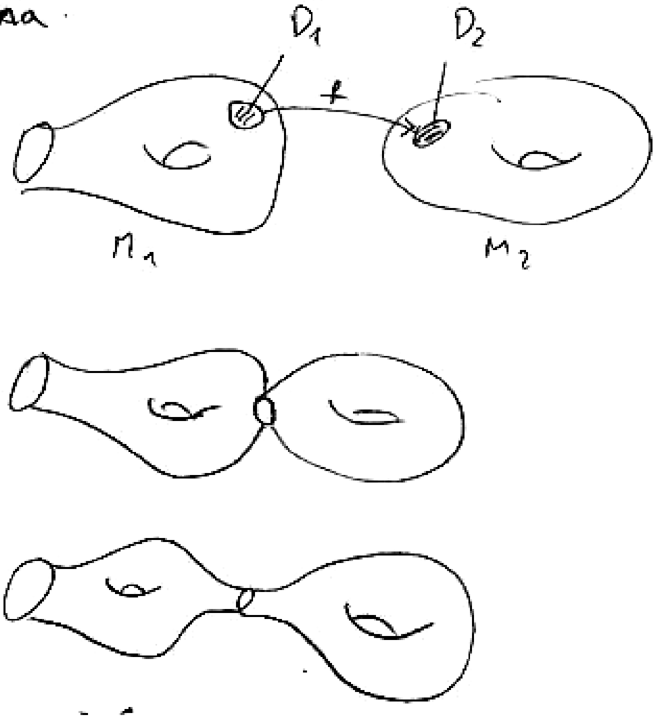
~~M_1, M_2~~ $D_i \subset M_i$ - kule n-wymiarowe zawarte w otoczeniach mapowych

$M_i \setminus \mathrm{int}\, D_i$ - rozmaitości, $B_i = \partial D_i \cong S^{n-1}$ - komponenty brzegu

$f: B_1 \to B_2$ dyfeomorfizm, $B_1 \cong S^{n-1}$, $B_2 \cong S^{n-1}$

$$(M_1 \setminus \mathrm{int}\, D_1) \cup_f (M_2 \setminus \mathrm{int}\, D_2) = M_1 \# M_2$$

- suma spójna.



UWAGI: (2) istnieją dokładnie 2 klasy izotopii dyfeomorfizmów

$f: S^{n-1} \to S^{n-1}$

(zachowujące ~~orient~~ i zmieniające orientację)

~~Są więc co najwyżej 2 rozmaitości~~

(1) Jeśli M_i jest spójna, to ~~Rozmaitość~~ $M_i \setminus \mathrm{int}(D_i)$, z dokł. do dyfeo, nie zależy od wyboru dysku D_i

(3) WNIOSEK. Są ~~potencjalnie~~ co najwyżej 2 rozmaitości będące sumą spójną $M_1 \# M_2$.
W przypadku rozmaitości zorientowanych jedna z nich jest kanonicznie preferowana.

VERTE →

KLASYFIKACJA ZAMKNIĘTYCH (czyli zwartych, bez brzegu) POWIERZCHNI (czyli 2-wym. rozmaitości) SPÓJNYCH. $\boxed{C}$

sfera torus 

Seria 1 (orientowalne): $S^2, T^2, T^2 \# T^2, T^2 \# T^2 \# T^2, \ldots$

Seria 2 (nieorientowalne) $\mathbb{RP}^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \ldots$

płaszczyzna rzutowa

- powierzchnie z powyższej listy są parami niedyfeomorficzne.
- każda zamknięta powierzchnia jest dyfeomorficzna z jedną z listy.

3-ROZMAITOŚCI - chirurgie Dehna, węzły
- rozkłady Heegaarda

WARTO POBIEŻNIE RZUCIĆ OKIEM DO JAKIEGOŚ ŹRÓDŁA np. W INTERNECIE

po angielsku - Dehn surgeries
Heegaard splittings